Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра общей физики и волновых процессов

Рассеяние света на плазмонных частицах сложной формы

Автор: Павлов Андрей Александрович
Группа: 525
Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Климов Василий Васильевич
к.ф.-м.н. Владимирова Юлия Викторовна
Рецензент:
д.ф.-м.н. Рубцов Алексей Николаевич

2012 г.

Содержание

1 Введение

В последнее время идет активное исследование свойств так называемых метаматериалов. Метаматериал – искусственно созданный материал, обладающий свойствами, которые обычно не встречаются в природе. Оптические метаматериалы могут представлять собой плоские слоистые структуры, со специально подобранной диэлектрической проницаемостью каждого из слоев, могут представлять собой плоскость из периодически расположенных наноструктур сложной формы или иметь какой-либо другой вид. Представляет значительные трудности представить и качественно описать процесс взаимодействия света со структурами, составляющими метаматериал, поскольку на наномасштабах играют существенную роль ближние поля, описать которые аналитически в большинстве случаев не представляется возможным (кроме самых простых, типа взаимодействия электромагнитной волны со сферой). В то же время, научившись управлять светом на таких масштабах, становится возможно создание супер- и гиперлинз, сенсоров ближнего поля, источников одиночных фотонов, "плащей-невидимок"и других устройств [1][2][3]. Так же значительный интерес представляют исследования киральных метаматериалов — сред, в которых показатель преломления отличается для право- и левополяризованных волн, так как они могут быть эффективно использованы в медицинских приложениях [4]. Поэтому важно разработать методы теоретического, численного расчета свойств метаматериала, чтобы иметь возможность создать материал с заранее заданными свойствами.

В настоящей работе, сначала на компьютере, в программе Comsol Multiphysics моделируется взаимодействие метаматериала с электромагнитной волной, затем с помощью метода мультипольных моментов рассчитывается дальнее поле. Метод мультипольных моментов состоит в представлении наноструктуры, составляющей метаматериал, в виде совокупности точечных мультипольных моментов. Дальнее поле, переизлученное структурой, получается как сумма полей от каждого из мультиполей по отдельности. После вычисления дальнего поля, оно используется для расчета коэффициентов прохождения и пропускания, которые затем сравниваются с посчитанными в COMSOL для подтверждения справедливости выбранной модели. Использование метода мультипольных моментов позволяет заглянуть внутрь исследуемой системы и попытаться качественно проанализировать взаимодействие света с метаматериалом.

1.1 Постановка задачи

Цель настоящей работы состоит в исследовании оптических свойств метаматериала, состоящего из бесконечного количества повторяющихся H-образных структур, представленных на рис. 1. Знакомстве с методом мультипольных моментов для расчета оптических свойств метаматериала, а так же изучении программы компьютерного моделирования Comsol Multiphysics.

Настоящая работа состоит из семи разделов. В разделе 2 описаны этапы задания модели метаматериала. В разделе 3 приведен вывод формулы для рассеяния электромагнитного поля маленькой частицей произвольной формы. Затем, в разделе 4 эта формула преобразуется для вычисления мультипольных моментов структуры, составляющей метаматериал, и создаваемых ими дальних полей. В разделе 5 приведены формулы для вычисления коэффициентов прохождения и отражения. Далее, в разделах 6 и 7 приведены обсуждение результатов моделирования и выводы.

2 Моделирование в Comsol Multiphysics

В настоящей работе, в качестве исследуемого метаматериала был выбран материал, исследование свойств которого было проведено экспериментально [5]. Для проведения численного моделирования взаимодействия метаматериала с электромагнитной волной и расчета коэффициентов пропускания и отражения использовалась программа Comsol Multiphysics. Задание модели в ней осуществлялось в несколько этапов. Сначала создавалась геометрия метаматериала (рис. 2): два золотых бруска с линейными размерами $315 \times 80 \times 40$ нм лежат параллельно в плоскости xy, на расстоянии $h = 70$ нм над ними находится еще один золотой брусок с размерами $355 \times 80 \times 40$ нм. Затем на границах области моделирования задавались граничные условия. На границах, перпендикулярных осям x и y — периодические условия, позволяющие смоделировать бесконечную плоскость, состоящую из данных ячеек. Период повторения по x и y равен линейному размеру окружающей структуру области моделирования вдоль соответствующих осей (700 нм по обеим осям). Сверху и снизу модель ограничивают области PML (Perfectly Matched Layers), которые поглощают все падающее на них излучение, позволяя тем самым избежать отражения рассеянной волны от границ области моделирования. Задача решается в рассеянной формулировке поля — конфигурация падающей волны задается заранее, при моделировании рассчитывается только рассеянное поле. в настоящей работе на метаматериал падает плоская волна с волновым вектором направленным вдоль оси z и поляризацией вдоль оси x: $\mathbf{E}_0 = \left(e^{-i(\omega_0 t + k_0 z)}, 0, 0\right)$. Следующим этапом задавались свойства материалов, составляющих структуру и окружающее пространство. Материалом для структуры было выбрано золото, диэлектрическая проницаемость которого была взята из "Handbook of Optical Materials-[6]. Окружающее структуру пространство — вакуум ($\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$).

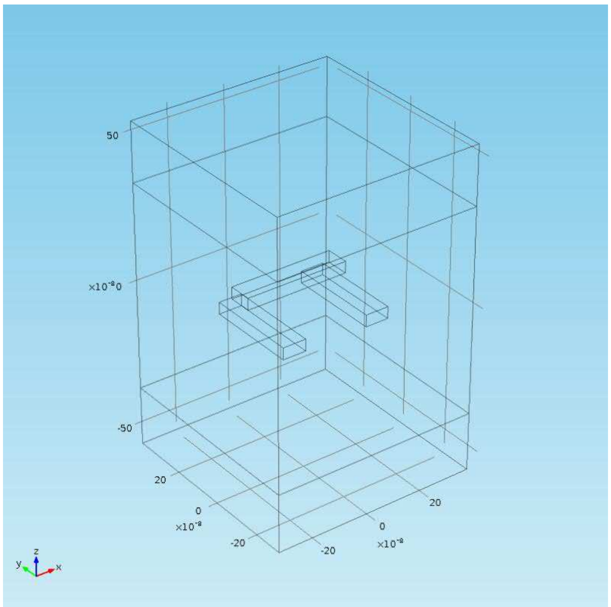

Рис. 1: Вид структуры, составляющей метаматериал. Размеры верхнего бруска: $355 \times 80 \times 40$ нм, размеры нижних брусков: $315 \times 80 \times 40$ нм, расстояние между нижними брусками: 220 нм, расстояние между верхним и нижними брусками: 40 нм, смещение верхнего бруска относительно середины нижних (вдоль оси y): 70 нм.

После задания граничных условий и характеристик веществ, все объекты в области моделирования разбивались на конечные элементы в виде тетраэдров. Максимальный шаг сетки для золотой частицы – 32 нм. Максимальный и минимальный шаг сетки для вакуума – 88 нм и 6.4 нм соответственно. Таким образом, на один период волны приходится не менее 10 ячеек сетки. Общее число элементов сетки – 68500, общее число степеней свободы – 457000.

Моделирование производилось для диапазона частот 150–350 ТГц с шагом 1 ТГц. Общее время моделирования составило примерно 5 часов 30 минут на компьютере со следующей конфигурацией: процессор Intel Xeon E5540 2.53 ГГц, 72 ГБ оперативной памяти.

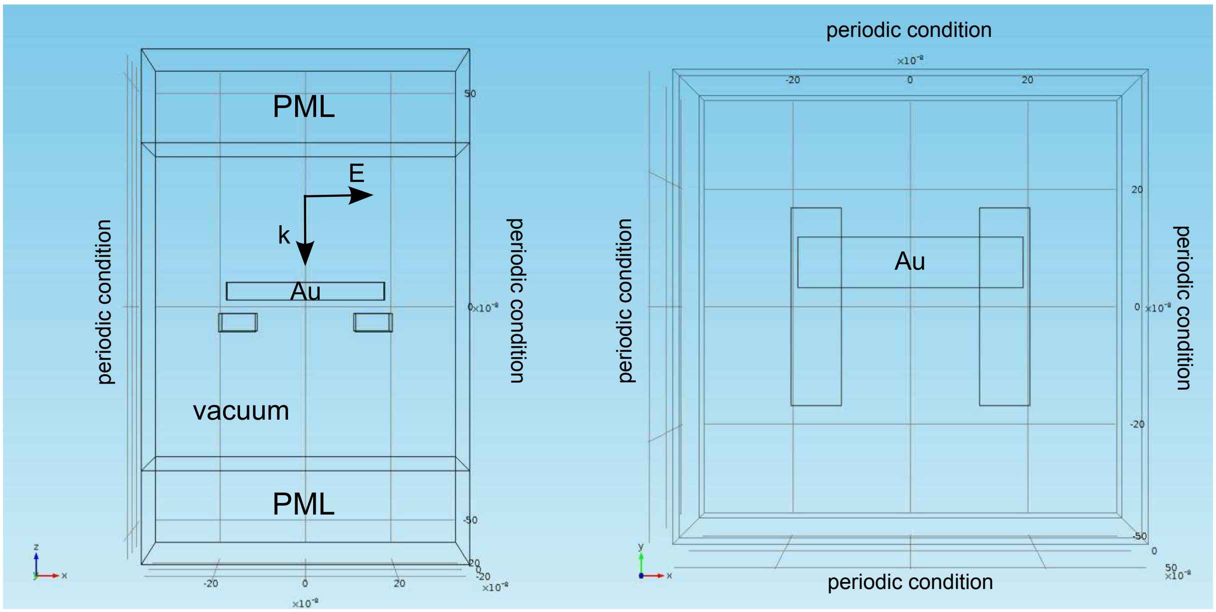

Рис. 2: Геометрия задачи, условия на границах области моделирования.

После окончания расчета производилась обработка результатов. Сначала внутренними средствами Comsol вычислялись мультипольные моменты структуры. Затем данные экспортировались в Matlab для вычисления рассеянного поля и коэффициентов прохождения и пропускания.

3 Рассеяние поля частицей произвольной формы

Рассмотрим сначала общий случай взаимодействия электромагнитной волны с произвольной частицей нанометровых размеров. Формулы, приведенные в этом и последующих разделах будут справедливы и для частного случая Н-образной структуры, составляющей исследуемый в настоящей работе метаматериал. Для электромагнитного потенциала $A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right)$, выполнение калибровки Лоренца $\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0\right)$ приводит к уравнениям Максвелла в виде:

$$\Box A^\alpha = \mu_0 \mathbf{J}^\alpha, \tag{1}$$

где $\mathbf{J}^\alpha = (c\rho, \mathbf{j})$ – 4-ток в частице, $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ – оператор Д'Аламбера. Тогда волновые уравнения для скалярного и векторного потенциалов, соответственно:

$$\Box\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2}$$

$$\Box\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{3}$$

Решение уравнения для векторного потенциала имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R}dV', \tag{4}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в точку наблюдения, $\mathbf{r}'$ – радиус вектор элемента объема dV', а интегрирование ведется по объему частицы. Используя калибровку Лоренца, получаем выражения для скалярного потенциала:

$$\phi = -c^2\int\operatorname{div}\mathbf{A}dt. \tag{5}$$

Напряженность электрического поля выражается через скалярный и векторный потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \int\left(c^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial^2 t}\right)dt. \tag{6}$$

Пользуясь тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}$, а так же тем, что векторный потенциал в свободном пространстве удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}$, получаем:

$$\mathbf{E} = \int\left(c^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)dt = c^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\mathbf{A}dt = \frac{c^2\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\iint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R}dV'dt. \tag{7}$$

Пусть на частицу падает электромагнитная волна $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, тогда плотность тока так же меняется по гармоническому закону: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, тогда
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R/c) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega R/c} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)e^{ik_0R}$ и интеграл принимает вид:

$$\mathbf{E} = \frac{c^2\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\iint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', \mathbf{t})e^{ik_0R}}{R}dV'dt. \tag{8}$$

Пользуясь равенством $\mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$, а так же тем, что $\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2\mu_0}$, получаем выражение для рассеянного поля:

$$\mathbf{E}_{sc} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')e^{ik_0R}}{R}dV' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{ik_0R}}{R}dV'. \tag{9}$$

4 Разложение рассеянного поля по мультиполям

Проведем теперь разложения рассеянного частицей поля по мультиполям. Затем разделим вклады в поле, соответствующие электрическому дипольному, магнитному дипольному и электрическому квадрупольному, и рассмотрим каждый из них в отдельности. Это позволит вычислить дальнее поле каждого из мультипольных моментов и судить о том, возбуждению каких моментов соответствуют резонансы в спектре метаматериала.

Выберем начало координат внутри частицы, тогда радиус-вектор из начала координат в точку наблюдения будет $\mathbf{r}$, единичный вектор в этом направлении – $\mathbf{n}$. На больших расстояниях от системы $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$, поэтому приближенно имеем:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n}\mathbf{r}', \tag{10}$$

$$\mathbf{E}_{sc} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik_0(r - \mathbf{n}\mathbf{r}')}}{r} dV'. \tag{11}$$

Раскладывая экспоненту в ряд Тейлора до второго порядка в окрестности $\mathbf{r}' = 0$, получаем:

$$\mathbf{E}_{sc} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}')(1 - ik_0\mathbf{n}\mathbf{r}')dV' = \frac{e^{ik_0(r - \mathbf{n}\mathbf{r}')}}{r}(\mathbf{d} - ik_0\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n}), \tag{12}$$

где $\mathbf{d} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\int \mathbf{E}(\mathbf{r}')dV'$ – электрический дипольный момент частицы, $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\int \mathbf{E}(\mathbf{r}')(\mathbf{n}\mathbf{r}')dV'$ – описывает магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты частицы.

Рассмотрим бесконечную плоскость, состоящую из периодически расположенных частиц. Пусть $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы относительно 0-й, расположенной в начале координат. Тогда рассеянное поле, создаваемое бесконечной плоскостью из частиц:

$$\mathbf{E}_{sc} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \left(\mathbf{d} - ik_0\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n}\right). \tag{13}$$

4.1 Поле электрических диполей

Найдем сначала поле от электрических дипольных моментов:

$$\mathbf{E}_{sc}^{d} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\mathbf{d}. \tag{14}$$

$$\sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\Delta x \Delta y = \frac{1}{\Delta S}\int \frac{e^{ik_0\sqrt{z^2+(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{z^2+(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'dy', \tag{15}$$

где Δx, Δy – период повторения частиц вдоль осей x и y соответственно, ΔS – площадь элементарной ячейки. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta S}\iint \frac{e^{ik_0\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+rho^2}}\rho d\rho d\phi &= \frac{1}{\Delta S}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{e^{ik_0\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+rho^2}}\rho d\rho = \\ = \frac{2\pi}{\Delta S}\int_0^{\infty} e^{ik_0\sqrt{z^2+\rho^2}} d\left(\sqrt{z^2+\rho^2}\right) &= \frac{2\pi i}{k_0 \Delta S}e^{ik_0\sqrt{z^2}}.\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом:

$$\mathbf{E}_{sc}^{d} = \frac{2\pi i}{k_0\Delta S}\operatorname{rot}\operatorname{rot} e^{ik_0\sqrt{z^2}}\mathbf{d}. \tag{17}$$

Рассмотрим последовательно действие каждого из операторов rot:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} e^{ik_0\sqrt{z^2}}\mathbf{d} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ d_x e^{ik_0\sqrt{z^2}} & d_y e^{ik_0\sqrt{z^2}} & d_z e^{ik_0\sqrt{z^2}} \end{vmatrix} = \\ &= d_y(-ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2})\mathbf{i} - d_x(-ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2})\mathbf{j} = \\ &= ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i} + d_x\mathbf{j}).\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i}+d_x\mathbf{j})) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -d_y ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2} & d_x ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -d_x(-k_0^2 e^{ik_0\sqrt{z^2}})\mathbf{i} - d_y(-k_0^2 e^{ik_0\sqrt{z^2}})\mathbf{j} = \\ &= k_0^2 e^{ik_0\sqrt{z^2}}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}).\end{aligned} \tag{19}$$

Окончательно, выражение для поля рассеянной волны, учитывающее электрический дипольный вклад, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E}^d_{sc} = \frac{2\pi k_0 i}{\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}). \tag{20}$$

Найдем магнитное поле:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_{sc} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{sc}}{\partial t} = i\omega\mu_0\mathbf{H}_{sc}$$
$$\mathbf{H}^d_{sc} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}_{sc} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{2\pi k_0 i}{\Delta S}\operatorname{rot} e^{ik_0\sqrt{z^2}}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}). \tag{21}$$

$$\operatorname{rot} e^{ik_0\sqrt{z^2}}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ d_x e^{ik_0\sqrt{z^2}} & d_y e^{ik_0\sqrt{z^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i} + d_x\mathbf{j}). \tag{22}$$

$$\mathbf{H}_{sc} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{2\pi k_0 i}{\Delta S} ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i}+d_x\mathbf{j}) = \frac{2\pi k_0 i}{Z_0\Delta S}e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i}+d_x\mathbf{j}), \tag{23}$$

где $Z_0 = \mu_0 c$ – волновое сопротивление вакуума. Таким образом, рассеянное поле, создаваемое бесконечной плоскостью из дипольных электрических моментов, выражается следующими формулами:

$$\mathbf{E}^d_{sc} = \frac{2\pi k_0 i}{\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j}),$$
$$\mathbf{H}^d_{sc} = \frac{2\pi k_0 i}{Z_0\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z}^2}(-d_y\mathbf{i} + d_x\mathbf{j}), \tag{24}$$
$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\int \mathbf{E}(\mathbf{r}')dV'.$$

4.2 Поле магнитных диполей и электрических квадруполей

Найдем теперь поле рассеянной волны, созданное электрическим квадрупольным и магнитным дипольным моментами:

$$\mathbf{E}_{sc} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\left(-ik_0\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n}\right). \tag{25}$$

Заметим, что:

$$\operatorname{grad}\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \left(ik_0\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} - \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2}\right)\mathbf{n} \approx ik_0\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\mathbf{n}. \tag{26}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}\sum \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\left(-ik_0\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n}\right) &= -\operatorname{grad}\sum\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\hat{\mathbf{M}} = -\frac{2\pi i}{k_0\Delta S}\operatorname{grad}e^{ik_0\sqrt{z^2}}\hat{\mathbf{M}} = \\ &= -\frac{2\pi i}{k_0\Delta S}ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\mathbf{E}_{sc} = \frac{2\pi}{\Delta S}\operatorname{rot}\operatorname{rot}e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k}. \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x & e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y & e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_z\end{vmatrix} = \\ = \left(-ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y\right)\mathbf{i} &- \left(-ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x\right)\mathbf{j} = ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}\left(-(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y\mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x\mathbf{j}\right).\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}\left(-(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y\mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x\mathbf{j}\right) &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y & ik_0e^{ik_0\sqrt{z^2}}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x & 0\end{vmatrix} = \\ &= k_0^2e^{ik_0\sqrt{z^2}}\frac{z}{\sqrt{z^2}}\left((\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x\mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y\mathbf{j}\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Окончательно имеем:

$$\mathbf{E}_{sc} = \frac{2\pi k_0^2}{\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} \left((\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y \mathbf{j} \right). \tag{31}$$

Найдем магнитное поле:

$$\mathbf{H}_{sc} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{sc}. \tag{32}$$

$$\operatorname{rot} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} \left((\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y \mathbf{j} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x & e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= ik_0 e^{ik_0\sqrt{z^2}} \left(-(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x \mathbf{j} \right). \tag{33}$$

Таким образом, рассеянное поле, создаваемое бесконечной плоскостью из квадрупольных электрических и магнитных дипольных моментов, выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sc}^{Qm} &= \frac{2\pi k_0^2}{\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} \left((\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y \mathbf{j} \right), \\ \mathbf{H}_{sc}^{Qm} &= \frac{2\pi k_0^2}{Z_0 \Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \left(-(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x \mathbf{j} \right), \\ \hat{\mathbf{M}}\mathbf{k} &= \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}')(\mathbf{k}\mathbf{r}') dV'. \end{aligned} \tag{34}$$

4.3 Разделение магнитного дипольного момента и электрического квадрупольного

Проведем разделение магнитного дипольного момента и электрического квадрупольного. Квадрупольная электрическая часть – симметричная часть тензора $\hat{\mathbf{M}}$, а магитодипольная – антисимметричная [7]. Тензор $\hat{\mathbf{M}}$ можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей следующим образом:

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{n} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \int \left(\mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \right) dV' + \frac{1}{2} \int \left[[\mathbf{r}' \times \mathbf{E}] \times \mathbf{r}' \right] dV' \right). \tag{35}$$

В таком случае поле бесконечной плоскости из электрических квадруполей:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{sc}^{Q} &= \frac{2\pi k_0^2}{\Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2}} \left((\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x^Q \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y^Q \mathbf{j} \right), \\
\mathbf{H}_{sc}^{Q} &= \frac{2\pi k_0^2}{Z_0 \Delta S} e^{ik_0\sqrt{z^2}} \left(-(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_y^Q \mathbf{i} + (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})_x^Q \mathbf{j} \right), \\
(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{k})^Q &= \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}') z' + \mathbf{r}' E_z(\mathbf{r}') \right) dV'.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Тогда магнитодипольное поле:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{sc}^{m} &= \mathbf{E}_{sc}^{Qm} - \mathbf{E}_{sc}^{Q}, \\
\mathbf{H}_{sc}^{m} &= \mathbf{H}_{sc}^{Qm} - \mathbf{H}_{sc}^{Q}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

5 Вычисление коэффициентов прохождения и отражения

Для вычисления коэффициента прохождения необходимо рассчитать вектор Пойнтинга для суммы внешнего поля, падающего на частицу, и рассеянного поля, и затем нормировать его на вектор Пойнтинга внешнего поля. Суммарное электрическое и магнитное поля равны в рассматриваемой модели:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_{sc}^{d} + \mathbf{E}_{sc}^{Qm} + \mathbf{E}_0, \\
\mathbf{H}_T &= \mathbf{H}_{sc}^{d} + \mathbf{H}_{sc}^{Qm} + \mathbf{H}_0,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

где $\mathbf{E}_0 = \left(e^{-ik_0 z}, 0, 0\right)$, $\mathbf{H}_0 = \left(0, \frac{e^{-ik_0 z}}{Z_0}, 0\right)$ – внешние электрическое и магнитное поля, а рассеянные поля берутся в точке с координатой $z < 0$. Усредненный вектор Пойнтинга:

$$
\mathbf{S}_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* \right]. \tag{39}
$$

Его надо нормировать на вектор Пойнтинга внешнего поля $\mathbf{S}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \right]$. Тогда коэффициент прохождения будет равен:

$$
T = \frac{\mathbf{S}_T}{\mathbf{S}_0}. \tag{40}
$$

Аналогично вычисляется коэффициент отражения:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_R &= \mathbf{E}_{sc}^{d} + \mathbf{E}_{sc}^{Qm}, \\
\mathbf{H}_R &= \mathbf{H}_{sc}^{d} + \mathbf{H}_{sc}^{Qm},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

где рассеянные поля берутся в точке с координатой $z > 0$. Коэффициент отражения:

$$R = \frac{\mathbf{S}_R}{\mathbf{S}_0}, \tag{42}$$

где $\mathbf{S}_R$:

$$\mathbf{S}_R = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R^* \right]. \tag{43}$$

6 Обсуждение результатов

На рис. 3 и 4 приведены сравнительные графики для коэффициентов пропускания и отражения посчитанными по формулам (40) и (42) с коэффициентами, рассчитанными в Comsol. В Comsol пропускание и отражение рассчитывается путем усреднения вектора Пойнтинга в плоскости xy при $z = 250$ нм (выше структуры, учитывается только рассеянное поле) для коэффициента отражения и при $z = -250$ нм (ниже структуры, учитывается полное поле) для коэффициента пропускания. Как видно из графиков, значения коэффициентов довольно точно совпадают, что говорит о адекватности выбранной модели взаимодействия света с метаматериалом.

Как видно из графика на рис. 5, каждому из резонансов в спектре метаматериала в данном частотном диапазоне соответствует возбуждение в основном дипольного электрического момента. Вклад мультиполей более высокого порядка существенно меньше. Резонансы такого вида часто сравнивают с эффектом электромагнитно-индуцированной прозрачности [8][9]. В частности, авторы эксперимента по исследованию данного метаматериала предполагают, что один из этих резонансов соответствует электродипольному возбуждению верхнего бруска структуры, а другой резонанс соответствует квадрупольному возбуждению в паре нижних брусков, и проводят аналогию между данным метаматериалом и трехуровневым атомом, в котором с полем эффективно взаимодействует только один переход [5]. Однако, однако метод мультипольных моментов показывает, что оба резонанса соответствую дипольному преимущественно возбуждению в метаматериале, и квантовомеханическая аналогия в данном случае не применима.

Из рис. 6 видно, что падающая волна возбуждает в структурах, составляющих метаматериал, дипольный магнитный момент, несмотря на то, что они состоят из вещества с $\mu = 1$. В этом принципиальное отличие метаматериала от обычного макроскопического материала — в метаматериале при взаимодействии со светом проявляются необычные свойства, которые невозможно наблюдать для обычно материала. Не смотря на то, что величина магнитного дипольного момента в этом случае мала, принципиально, что она отлична от 0. Это говорит о том, что возможно создать такую конфигурацию наночастицы, при которой ее магнитный дипольный момент окажется сравним по порядку с электрическим дипольным и будет вносить существенный вклад в взаимодействие света с таким метаматериалом.

7 Выводы

В результате выполнения работы:

- Показано, что метод мультипольных моментов адекватно описывает рассеяние электромагнитной волны метаматериалом.
- Показано, что резонансы в спектре метаматериала в исследованном частотном диапазоне соответствуют возбуждению преимущественно дипольного электрического момента.
- Показано, что в результате взаимодействия электромагнитной волны с метаматериалом, составленном из диамагнитного вещества ($\mu = 1$), тем не менее, благодаря его сложной структуре, в нем возбуждается дипольный магнитный момент.

Список литературы

[1] В. Г. Веселаго Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ. УФН, Т. 92, № 7, с. 517 (1967)

[2] W. Cai, V. Shalaev. Optical Metamaterials - Fundamentals and Applications. Springer (2010)

[3] J. B. Pendry. Negative Refraction. Contemporary Physics, volume 45, number 3 (2004)

[4] В. В. Климов. Наноплазмоника. Физматлит (2009)

[5] Na Liu, Lutz Langguth, Thomas Weiss, Jurgen Kastel, Michael Fleischhauer, Tilman Pfau and Harald Giessen. Plasmonic analogue of electromagnetically induced transparency at the Drude damping limit. Nature Materials 8, 758 - 762 (2009)

[6] Marvin J. Webber. Handbook of Optical Materials. CRC Press (2003)

[7] J. D. Jackson. Classical Electrodynamics. Wiley (1999)

[8] Shuang Zhang, Dentcho A. Genov, Yuan Wang, Ming Liu, and Xiang Zhang. Plasmon-Induced Transparency in Metamaterials. Phys. Rev. Letters 101, 047401 (2008)

[9] Zhongyang Li, Yingfang Ma, Ran Huang, Ranjan Singh, Jianqiang Gu, Zhen Tian, Jiaguang Han, and Weili Zhang. Manipulating the plasmon-induced transparency in terahertz metamaterials. Optics Express, Vol. 19, Issue 9, pp. 8912-8919 (2011)

[10] A. N. Grigorenko, A. K. Geim, H. F. Gleeson, Y. Zhang, A. A. Firsov, I. Y. Khrushchev and J. Petrovic. Nanofabricated media with negative permeability at visible frequencies. Nature 438, 335-338 (17 November 2005)

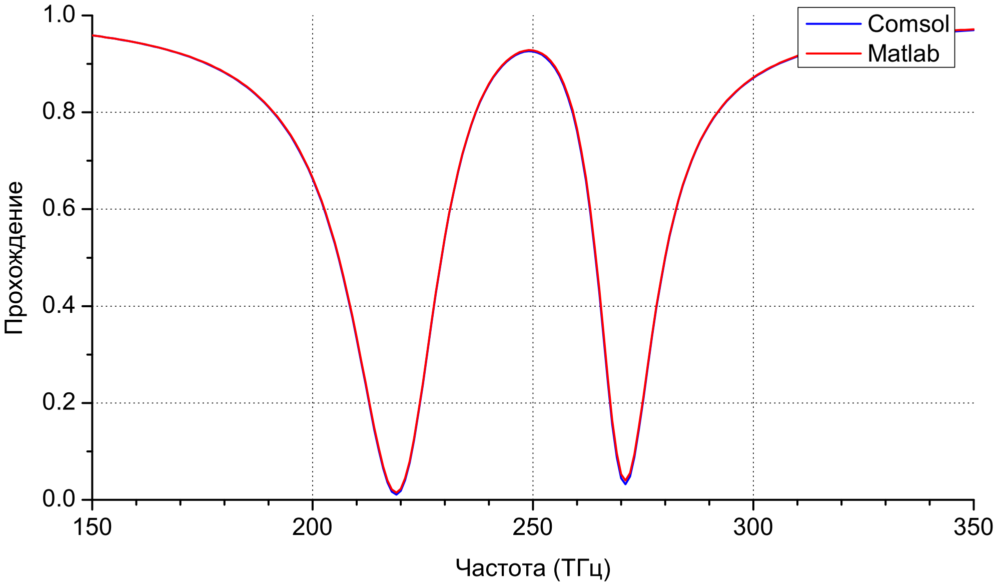

Рис. 3: Коэффициент прохождения, вычисленный аналитически (Matlab) и рассчитанный в Comsol.

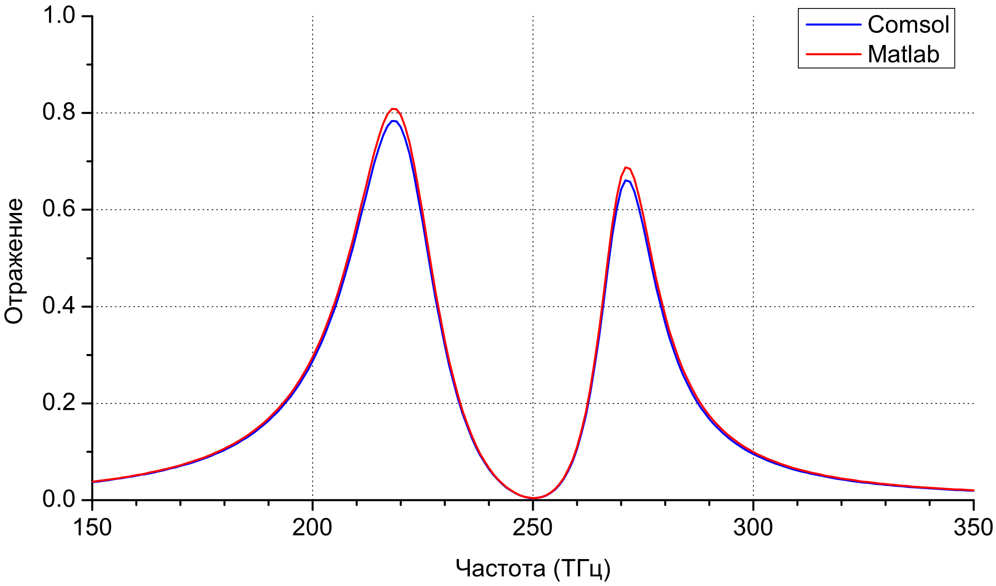

Рис. 4: Коэффициент отражения, вычисленный аналитически (Matlab) и рассчитанный в Comsol.

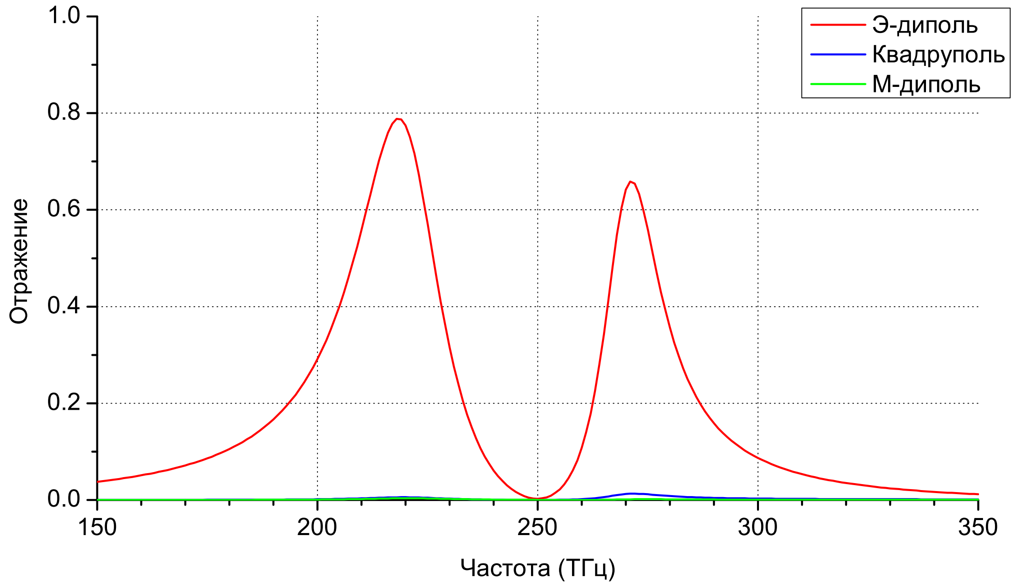

Рис. 5: Вклад в вектор Пойнтинга от различных мультипольных моментов.

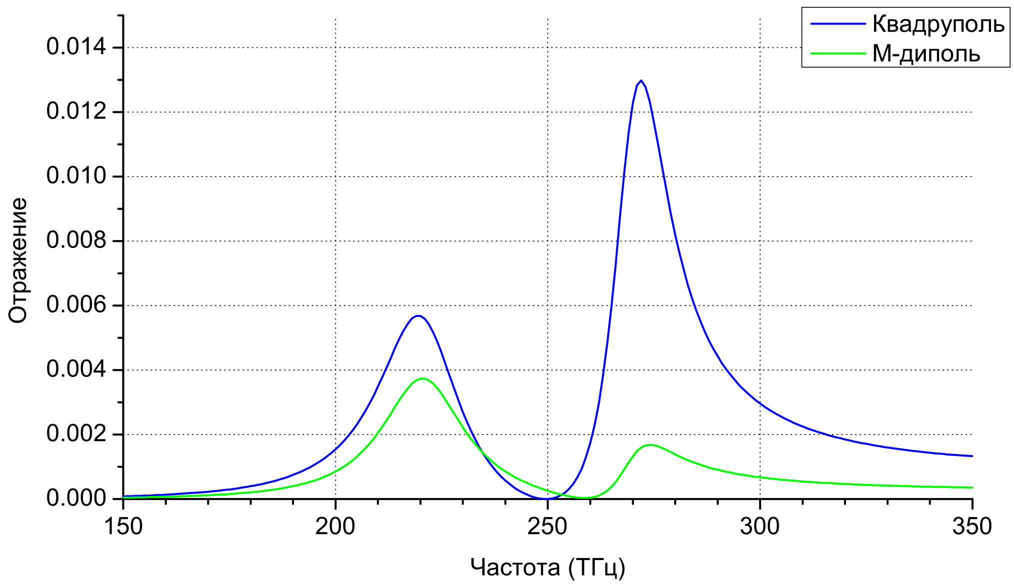

Рис. 6: Вклад в вектор Пойнтинга от магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов.