

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**Исследование информационной эффективности квантовых
измерительных систем**

Дипломная работа

студента 625 группы

Бокарева Д. П.

“допущен к защите”

“ ” декабря 2002 г.

зав. кафедрой ОФ и ВП

проф. Макаров В. А.

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Гришанин Б. А.

Москва 2002

Аннотация

Основные типы классической и квантовой информации, известные в настоящее время, рассматриваются в приложении к фундаментальным моделям квантовой оптики — двухуровневому атому и Λ -системе, для которых выполнены расчёты когерентной и совместимой информации и проанализирована их зависимость от параметров возбуждающего лазерного поля и времени излучения. Рассчитана пропускная способность Λ -системы (0.18 кубит на единицу безразмерного времени γt), а также определены параметры эксперимента по измерению дипольного момента атомного перехода двухуровневой системы при её резонансном возбуждении, для которых количество извлекаемой за время измерения совместимой информации максимально.

Содержание

1 Введение	4
2 Цель работы	8
3 Качественное содержание квантовой информации	9
3.1 Классическая информация Шеннона	11
3.2 Информационная специфика квантовых событий	13
3.3 Когерентная информация	15
3.4 Общие свойства совместимой информации	20
4 Пропускная способность Λ-системы	23
4.1 Необходимость теоретического рассмотрения Λ -системы	23
4.2 Описание процесса взаимодействия Λ -системы с фотонным полем	25
4.3 Результаты расчётов	27
5 Расчёт совместимой информации в экспериментальной схеме	27
5.1 Блок-схема экспериментальной установки	29
5.2 Схема математических расчётов	31
5.3 Обсуждение полученных результатов	33
6 Выводы	37
7 Благодарности	37

1 Введение

Развитие физики на сегодняшний день достигло уровня, при котором наряду с теоретическим описанием квантовых систем вполне осуществимым является экспериментальное получение и исследование их наперёд заданных состояний. Неклассическая природа ряда квантовых состояний обеспечивает существенно квантовые свойства физических систем, абсолютно отличные от классических как по природе их образования, так и по способам описания. Их математическое описание, как правило, использует достаточно сложные с технической точки зрения понятия, например, понятие супероператора. Максимально эффективное использование квантовых свойств в практических приложениях является в большинстве приложений нетривиальной задачей. Применение квантовых алгоритмов позволяет реализовывать качественно новые приложения, обладающие неоспоримым преимуществом по сравнению с классическими аналогами. Многие попытки практической реализации подобных методов сейчас находятся на стадии разработки. Некоторые из них, наиболее простые в осуществлении, уже в процессе реализации.

Из-за технических трудностей, возникающих при контроле и манипуляции квантовыми объектами, реально поставлены лишь немногие эксперименты, использующие квантовые особенности исследуемых в них систем. В основном это работы по проверке неравенств Белла [1]. Они явились первыми подтверждениями правильности теоретических расчётов. Одновременно с этим стало ясно, что далеко не все типы природных явлений могут быть описаны в рамках локальных теорий скрытых переменных, заменяющих стандартное квантово-механическое описание. Таким образом, сложившаяся ситуация стимулировала интерес физиков к дальнейшим изучением и совершенствованиям квантовой теории. Развитие методов описания экспериментальных приложений также явилось интересной задачей, решение которой поможет открыть новые возможности анализа экспериментальных схем, и, возможно, приведёт к созданию качественно новых полезных устройств и приборов, например, таких как широкообсуждаемые квантовые компьютеры.

В результате трудов многих учёных на протяжении нескольких последних лет определились основные области использования квантовых устройств, самые передовые направления из которых видны уже сейчас [2].

Наиболее продвинутыми являются метрологические приложения [3]. В них предлагается создавать состояния со сжатым спином, с помощью чего можно понизить уровень

проективных квантовых шумов и тем самым повысить точность оптических атомных стандартов.

Другим возможным применением квантовой информации считается квантовая криптография [4]. Особенно хорошо популярность развития данного направления поясняет следующий пример. Допустим, что два независимых объекта обмениваются между собой важной информацией, конфиденциальность которой должна быть абсолютной. При этом, скорее всего, найдётся третий объект, готовый прослушать данный обмен и использовать полученную информацию в своих целях. В подобных случаях применение квантовых методов позволяет осуществлять регистрацию любого прослушивания, так как при передаче сообщений по квантовым каналам сам процесс прослушивания не проходит незаметно для объектов, находящихся в процессе общения. Из-за невозможности копирования квантовых состояний [5] незаконное прослушивание любого сообщения, переданного посредством квантового информационного канала (способа преобразования квантовых состояний, подробно описанного в ряде работ, например в [5, 6], а также ниже по тексту), процесс передачи сообщения по которому происходит в результате трансляция квантового состояния, кодирующего сообщение, от передатчика к приёмнику, приводит к снижению количества квантовой информации, характеризующей эффективность передачи состояния по каналу. При этом, прямой расчёт количества квантовой информации помогает предотвратить “кражу” важного сообщения путём информирования сторон, осуществляющих диалог, о нежелательном вмешательстве в него постороннего слушателя. Таким образом, невозможным является безнаказанное “воровство” секретных сведений, паролей и данных. Наиболее живой интерес к данной области приложений квантовой теории (и, в частности, теории квантовой информации [5]) проявляют всевозможные финансовые структуры, не желающие мириться с подобными информационными потерями, часто приводящими к ощутимым денежным убыткам.

Много внимания уделяется квантовой телепортации [7, 8]. Суть этого явления заключается в передаче сообщения о квантовом состоянии системы по классическому каналу. В процессе передачи информация о входном состоянии оказывается зашифрованной в классическом сообщении передаваемом по информационному каналу. Её анализ позволяет восстановить исходное состояние, подвергнутое телепортированию. Существует возможность передачи повышенного количества классической информации через квантовый канал. Этот процесс успешно реализуется посредством плотного квантового кодирования [9, 10].

Кроме этого, рассматривается перспектива создания квантовых компьютеров, в основу которых заложена реализация квантовых вычислений [11]. Их преимуществом является высокое быстродействие по сравнению с обычными вычислительными машинами. Увеличение скорости расчётов достигается в результате эффективного использования квантовых свойств перепутанных состояний. Быстродействие квантовых компьютеров по сравнению с классическими аналогами, использующими классическую логику при проведении вычислений, тем более очевидна, чем большее количество квантовых систем (которые обычно являются атомами или ионами), хранящих информацию, участвуют в преобразованиях, осуществляющих квантовые математические алгоритмы. Самые лучшие из разработанных на сегодняшний день алгоритмов позволяют получить выигрыш в производительности пропорциональный экспоненте числа задействованных в вычислениях квантовых систем. К сожалению, практически ни одного из подобных “хороших” алгоритмов не было осуществлено экспериментально. Дело в том, что для экспериментальной реализации квантовой логики должно использоваться множество независимых микроскопических систем атомного либо молекулярного размеров, обеспечивающих бесперебойное управление собой. На сегодняшний день осуществление данного условия невыполнимо. Однако, большое количество научных работ посвящено этой проблеме, и, хочется верить, они приведут к желаемому результату. Наряду с описанными направлениями использования квантовых свойств неклассических систем предлагаются и другие способы их применения, но в ближайшее время экспериментальное их исследование остаётся за гранью возможного.

При проведении эксперимента для получения хороших результатов нужно подобрать объект, использование которого в качестве опытного образца обеспечит исследованию максимальную эффективность. В случае экспериментов с квантовыми объектами, часто строение их активных уровней может быть описано двухуровневой системой и Λ -системой. Преимущество первой состоит в простой структуре и возможности наиболее лёгкого управления ей. Любое экспериментальное подтверждение какой-либо новой теории, представляющее собой исследование атомных систем, всегда начинается с объекта, способного быть описанным в терминах двухуровневой системы. Наиболее известными из подобных природных систем, часто встречающихся в экспериментальных работах являются ионы Са. Двухуровневая система позволяет качественно понять самые важные особенности наблюдаемых явлений и численно оценить их масштабы. Очевидным логическим продолжением исследования таких систем является переход к исследованию более сложных объектов,

таких как многоуровневые системы или, например, описанная ниже Λ -система.

Она представляет интерес в плане длительного хранения записанной на неё информации. Структура нижних уровней Λ -системы, характерное время перехода между которыми составляет в некоторых случаях порядка нескольких минут, позволяет осуществить длительную неизменность их совместного состояния. Λ -система получила широкое применение во многих экспериментах по исследованию её квантовых свойств и свойств систем, находящихся с ней во взаимодействии. Частое использование этой системы на практике объясняется также её достаточно широким распространением в природных условиях. Объектами, при описании поведения которых можно использовать модель Λ -системы, являются атомы Na, K, Rb, Cs и ионы Be^+ , Ca^+ щелочных металлов [12]. Дополнительным преимуществом данных элементов является наличие на внешней орбите всего одного электрона. Этот факт обуславливает относительную простоту их спектров. Подуровни расщепления основного состояния $^2S_{\frac{1}{2}}$ этих атомов и ионов позволяют сохранять информацию в течение достаточно долгого времени и являются аналогом нижних уровней Λ -системы при описании эволюции данных объектов.

Одним из направлений теоретических исследований процессов трансляции сообщений через квантовые каналы является расчет квантовой информации, переданной за время трансляции. Передача квантовой информации сопровождается любой процесс передачи квантовых состояний посредством информационного канала. Квантовая информация позволяет оценивать эффективность квантовых измерений и качественно сравнивать разные схемы проведения экспериментов. Например, зная зависимость когерентной информации от времени, можно рассчитать пропускную способность квантового канала [13]. Данная характеристика также несет в себе сведения о процессе трансляции, которые используются для выбора значений параметров канала, необходимых для более эффективного его использования.

Вообще, при анализе информационных систем методом расчёта информации, которая может быть передана в процессе измерения в ходе какого-либо эксперимента, необходимо пользоваться понятием информационного канала. *Информационным каналом*, осуществляющим передачу значения физической величины либо состояния квантовой системы, называется совокупность передающих и регистрирующих систем, а также внешних и внутренних условий, влияющих на значение либо состояние, полученное в результате передачи. Таким образом, процесс измерения отображается информационным каналом, на вход которого подана измеряемая величина, а результат определяется выходом. В зависи-

мости от методов математического описания каналов, их разбивают на три вида: классические, полуклассические и квантовые. Если в первом случае имеется относительная простота теории и доказаны мощные теоремы, касающиеся передачи информации [14] (например, центральная теорема кодирования), то для последних двух видов каналов построение полной теории ещё не закончено и многие аналоги классических теорем оказываются совсем не очевидными.

Трудности в математическом описании неклассических каналов объясняются спецификой алгебры квантовых событий. В данном случае появляется бесконечно много базисных состояний, по которым производится разложение состояния рассматриваемой системы. Они произвольно ориентированы друг относительно друга, и определение понятия классической информации (информации Шеннона) становится невозможным. Значит, приходится вводить понятие новой информации, использующей квантовый формализм описания события. Попытки создать общую теорию квантовых и полуклассических каналов рождают множество научных работ и, возможно, новые результаты помогут решить существующую проблему.

Работа организована следующим образом. В пункте 2 объясняется цель работы и актуальность решаемой проблемы. Для чёткого понимания логики описываемых расчётов в пункте 3 приведён обзор всех существующих принципиально различных видов информации. В подпункте 3.1 в качестве напоминания кратко рассмотрен смысл и приведена формула для расчёта классической информации Шеннона, которая является основой для введения понятия совместимой информации. Большое внимание уделено описанию специфики квантовых событий (пп. 3.2). Подробно рассматриваются когерентная (пп. 3.3) и совместимая (пп. 3.4) информации. В пункте 4 с помощью расчёта когерентной информации определена пропускная способность Λ -системы. Пункт 5 посвящён описанию эксперимента по определению дипольного момента атомного перехода двухуровневой системы и расчёту совместимой информации переданной в ходе измерения. Основные итоги дипломной работы и наиболее важные выводы представлены в пункте 6.

2 Цель работы

Простейшие квантовые системы, двухуровневая система и Λ -система, являются, как было сказано в пункте 1, удобными и часто используемыми моделями для описания квантовых

объектов. Простота устройства их уровней и относительно несложное, хотя и громоздкое, математическое описание делает их привлекательными в плане расчёта квантовой информации. Тем не менее, основные закономерности и особенности расчёта квантовой информации как метода описания квантовых информационных каналов становятся видны уже при анализе подобных несложных систем.

Целью данной работы является дальнейшее изучение и теоретическое исследование свойств квантовой информации и применение ранее развитых методов к информационному анализу конкретных физических систем с целью оптимизации режимов их использования в экспериментальных схемах.

Для реализации данной цели рассматриваются две более частных задачи. Первая состоит в определении информационной пропускной способности Λ -системы при возбуждении её периодическими короткими импульсами, длительностью меньше времени релаксации верхнего уровня. При этом под пропускной способностью понимается объём когерентной информации, реализуемой в информационном канале Λ -система—фотонное поле. Вторая задача состоит в расчёте совместимой информации, извлекаемой посредством квантового канала двухуровневая система—фотодетектор, для информационного анализа эксперимента по измерению дипольного момента атомного перехода при его резонансном возбуждении.

3 Качественное содержание квантовой информации

Понятие квантовой информации непосредственно связано с основными законами квантовой физики и, возникнув параллельно с их становлением, играет в ней ключевую роль. Любой квантовый эффект, например, существенно микроскопический процесс спонтанного излучения атома или макроскопический переход в сверхпроводящее состояние, может быть явно связан с процессами преобразования квантовой информации, если только адекватно связать эту информацию с соответствующими ансамблями квантовых состояний.

Информационные соотношения между квантовыми состояниями определяются динамическими свойствами физической системы и являются наиболее фундаментальным проявлением её динамических характеристик. Они могут характеризовать как собственную динамику некоторой квантовой системы, так и её взаимодействие с другими системами. Исходно они представляются уравнениями для волновых функций или операторов квантовых

состояний, а суть теоретико-информационного подхода состоит во введении соответствующей количественной меры информационного обмена.

До тех пор, пока не обсуждается конкретная схема физического эксперимента, описание квантовой системы сводится именно к выявлению её информационных характеристик, количественно выражающих соотношения между квантовыми состояниями данной системы и состояниями других систем, с которыми она может взаимодействовать. Например, основное информационное содержание процесса излучения двухуровневого атома сводится к переходу заложенной в нём квантовой информации к соответствующему кванту фотонного поля. При этом данный квант получает информацию о фазе исходного атомного состояния. То есть, информационный обмен является специфически квантовым процессом, сохраняющим когерентность между трансформируемыми волновыми функциями [5].

Ключевое различие между классической и квантовой информацией обусловлено *совместимостью* или *несовместимостью* состояний, с которыми связана представляющая интерес информация. Состояния различных систем, рассматриваемые в один и тот же момент времени, всегда совместимы, так как принадлежат разным пространствам. По-этому, они не могут копировать друг друга, если содержат внутренне несовместимые состояния. И, наоборот, полные ансамбли квантовых состояний одной и той же системы, рассматриваемые в два различных момента времени, чаще всего несовместимы и, более того, в отсутствие шумов могут копировать друг друга, в каждый момент времени сохраняя уникальность своих квантовых флуктуаций. Разномоментные же состояния двух различных систем могут быть как совместимы, так и несовместимы, в зависимости от вида преобразования, связывающего рассматриваемые моменты времени. Этот фактор весьма существен при рассмотрении основных определений количественных мер квантовой информации.

Действительно, для ортогонального набора событий мы можем использовать классическую (двузначную — аристотелеву) логику [15], лежащую в основе классической физики, в которой справедлив закон исключённого третьего: любое элементарное событие мы можем классифицировать как “*либо A, либо не A*”.

В квантовой теории роль элементарных событий играют чистые состояния системы. Согласно принципу суперпозиции, помимо ортогональных состояний существует бесконечное множество неортогональных им состояний, для которых закон исключенного третьего не справедлив, и произвольное состояние может давать ненулевые проекции сразу на все состояния, образующие ортогональный базис. Вообще, рассматривая алгебру с опе-

рацией сложения, заданной в виде линейного объединения подпространств и операцией умножения в виде их пересечения, обнаружим, что уже для трех произвольных неортогональных и несовпадающих друг с другом состояний не выполняется закон дистрибутивности, являющийся логическим выражением закона исключенного третьего [16].

Наиболее общее деление типов квантовых каналов и соответствующих информационных мер основано на внутренней и взаимной совместимости (т.е. ортогональности — “классичности”) или несовместимости (неортогональности — “неклассичности”) квантовых состояний входа и выхода информационного канала [5].

Подводя итог данных рассуждений, можно сказать, что все основные типы квантовой и классической информации, качественно отличные между собой, можно выделить в отдельные группы. Их подробному рассмотрению будут посвящены следующие подпункты (пп. 3.1, 3.3, 3.4).

3.1 Классическая информация Шеннона

Фундаментальная концепция информационной меры классической информации вводится в теории информации, созданной Шенноном [14, 17]. Для классических систем физических событий можно универсальным образом ввести количественную меру, позволяющую для объединения многих каналов с помехами выразить асимптотически достижимый уровень объёма безошибочно передаваемой информации в виде оптимизированного значения Шенноновского количества информации. Данная теория основана на специфическом свойстве классических ансамблей, которое исключено из исходных принципов квантовой физики. Этим свойством является *воспроизводимость* классических событий: статистически нет никакого различия, имеете ли вы на входе и выходе физически одну и ту же систему или её информационно эквивалентную копию. Последнее же невозможно в квантовом мире, и, очевидно, именно с этим обстоятельством связано возникновение дискуссии о том, может ли вообще информационная мера Шеннона каким-либо образом использоваться применительно к квантовым системам [18–20].

Шенноновское количество информации $I_{xy} = S_x - S_{x|y} = S_y - S_{y|x}$, является взаимной информацией связи случайных величин x и y . Её можно интерпретировать как информационную меру скоррелированности случайных величин x и y , или как количество информации об одной переменной (x), содержащейся в другой (y).

Для дискретной случайной величины x энтропия $S_x = -\sum_x p_x \log_2 p_x$, где p_x есть вероятность x . Энтропия непрерывной случайной величины определяется как

$$S_x = -\int_X p(x) \log_2 \frac{p(x)}{\nu_0(x)} dx \quad ,$$

где $p(x)$ — плотность вероятности наблюдения случайной величины x , $\nu_0(x)$ — вспомогательная плотность концентрации точек, в которых задана $p(x)$, не влияющая на величину информации связи и удовлетворяющая нормировке $\int_X \nu_0(x) dx = N$, где N — общее число точек [21].

Используя соотношение для условной энтропии $S_{x|y} = S_x - S_y$, можем записать шенновскую информацию в виде

$$I_{xy} = S_x + S_y - S_{xy} \quad , \quad (1)$$

откуда видна её симметричность относительно перестановки x и y местами. Минимальное значение информации связи равно нулю, что следует из определения информации в виде разности безусловной и условной энтропий, так как условная энтропия не превосходит безусловную. Максимальное значение ограничено максимальными значениями безусловной энтропии входа или выхода (S_x или S_y), то есть, логарифмом $\log_2 D$ минимального числа $D = \min\{D_x, D_y\}$ их состояний.

Если случайное событие y является результатом передачи по классическому информационному каналу состояния x в ходе какого-нибудь эксперимента, то информация, рассчитанная по формуле (1), определяет двоичный логарифм числа точек евклидова пространства, которое может быть без искажения передано по классическому каналу в ходе проводимого измерения. Каналом в технических приложениях обычно является совокупность регистрирующих приборов.

Наряду с классической информацией, определённой для каналов, где состояния входа и выхода всегда совместимы и в исходной форме теории информации Шеннона рассматриваются как классические “по умолчанию” [14, 17], также рассматривают и *полуклассическую информацию* [22]. Использование её становится эффективным, если вся информация на входе информационного канала задаётся классическими состояниями λ , а состояния выхода содержат внутреннюю квантовую несовместимость как квантовые состояния в гильбертовом пространстве H , которые, тем не менее, автоматически совместимы с состояниями входа. При рассмотрении полуклассической информации квантовый канал

описывается ансамблем смешанных квантовых состояний $\hat{\rho}_\lambda$, зависящих от классического параметра λ [23]. Переменные λ эквивалентны входным переменным x , а множество всех волновых функций $\psi \in H$ — выходным состояниям y , а матрица плотности $\hat{\rho}_\lambda$ — условному распределению вероятностей $p(y|x)$ классического канала.

Отметим, однако, что классическая информация всегда может быть передана по квантовому каналу, и этот случай также представляет определённый интерес в квантовой физике. В работе [5] показано, что традиционное определение энтропии Шеннона и соответствующей информационной меры может быть с успехом использовано и для анализа квантовых систем при условии корректного учёта фундаментальных различий между ансамблями классических и квантовых событий.

3.2 Информационная специфика квантовых событий

По сравнению с теорией информации Шеннона, в приложении к физике роль квантовой информации представляется значительно более существенной, не позволяющей выделить её в качестве независимой от физики чисто математической дисциплины [24]. В отличие от классических систем, в квантовом случае проблема введения количественной меры квантовой информации не допускает единого решения, а зависит от физического содержания квантового информационного канала.

Специфика квантовой теории состоит в принципе суперпозиции квантовых состояний — сосуществовании наряду с состояниями $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ их произвольной линейной комбинации $c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle$, что приводит к существованию в любой квантовой системе континуального множества — гильбертова пространства состояний $H \ni \psi$, подавляющая часть которых не совпадает ни с одним из ортогональных базисных состояний $|n\rangle$, связанных с некоторой физической величиной, описываемой оператором $\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle \langle n|$. Ключевым моментом квантовой теории информации, вытекающим из принципа суперпозиции, является наличие неортогональных состояний, или несовместимых квантовых событий, к которым неприменимы законы классической логики. Совместимыми событиями, для которых мы можем применять развитую классическую теорию информации, являются только ортогональные пары волновых функций. Для того, чтобы выделить, или *селектировать*, такие состояния из всех физически возможных состояний системы, мы должны провести в системе *прямое*, или ортогональное, измерение, которое описывается ортогональным разложением единицы — ортопроекторной операторной мерой \hat{E}_α [1].

Несовместимость квантовых событий проявляется, в частности, в том, что возможность безошибочно отличить одно произвольное квантовое состояние $|\alpha\rangle \in H$ от другого $|\beta\rangle$ в общем случае отсутствует и существует только для ортогональных состояний. Вероятность же случайного совпадения двух произвольно взятых состояний определяется квадратом модуля скалярного произведения, так что двумерная плотность вероятности двух равновероятно выбранных состояний имеет вид

$$P(d\alpha, d\beta) = |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \frac{dV_\alpha dV_\beta}{D}, \quad (2)$$

где dV_α, dV_β — дифференциалы объёма на сфере волновых функций, удовлетворяющие условию нормировки $\int |\alpha\rangle \langle \alpha| dV_\alpha = \hat{I}$, а D является размерностью пространства H . Теория информации Шеннона позволяет рассчитать эффективное число N_α состояний α , различаемых переменной β и наоборот [25]. Распределение вероятностей (2) описывает информационный обмен между двумя переменными α и β , а он в соответствии с теорией Шеннона характеризуется эффективным числом N_α (достижимым в расчёте на один символ при рассмотрении бесконечно длинных последовательностей с независимо передаваемыми единичными символами) безошибочно переданных сообщений, сформированных из подмножеств A_α значений индексов квантовых состояний α . Если сопоставить каждому A_α наиболее подходящие состояния α , то все эти состояния будут безошибочно различимы, так что N_α и есть число различимых состояний. Оно определяется соответствующим количеством информации Шеннона

$$I_{\alpha\beta} = \int \log_2 \frac{P(d\alpha, d\beta)}{P(d\alpha)P(d\beta)} P(d\alpha, d\beta) \quad (3)$$

по формуле $N_\alpha = 2^{I_{\alpha\beta}}$.

Выполнение квантовых преобразований над системой преобразует не только базисные векторы, но и всё гильбертово пространство, что и используется в алгоритмах квантовых вычислений, радикально повышая их эффективность за счет высокой степени параллелизма выполняемых операций [11, 26, 27]. Однако, это континуальное множество состояний не содержит неограниченного объёма информации в её обычном классическом понимании.

Следующие два типа информации определяются для полностью квантовых каналов. При этом существует мнение [5], что когерентная и совместимая информации исчерпывают все возможные качественно различные типы информации, рассчитываемые в полностью квантовых каналах. Для чёткого понимания их роли в теории информации отдельно остановимся на описании каждого из оставшихся типов информации.

3.3 Когерентная информация

Применительно к полностью квантовым каналам, вход и выход в которых обладают квантовой природой и содержат как внутреннюю квантовую несовместимость, так и несовместимы взаимно, введено понятие когерентной информации I_c [28]. Её значение определяется формулой

$$I_c = S_{out} - S_e . \quad (4)$$

S_{out} описывает квантовую энтропию выходных переменных канала, а S_e — энтропию обмена, взаимствованную из резервуара. В некоторых работах предполагается, что при положительном значении I_c её величина равна двоичному логарифму размерности гильбертова пространства, все состояния которого могут быть переданы с вероятностью, равной единице в пределе бесконечного большого числа информационных трансляций.

Среди других типов квантовой информации когерентная информация позволяет различать два качественно различных класса информационного обмена, соответствующих обмену посредством классической информации и квантового перепутывания состояний. Когерентная информация является ненулевой только в последнем случае. Поэтому именно расчёт когерентной информации адекватен для обсуждения вопроса, в какой степени квантовый информационный канал даёт возможность использовать его выход как эквивалент входа для реализации задач, в которых существенна именно квантовая специфика входного сигнала. Данной проблематике посвящено большое количество современных публикаций (см., например, статью [26] и ссылки к ней). Являясь мерой сохранённой перепутанности квантовой системы после выполнения физического преобразования, когерентная информация в настоящее время представляет практический интерес в связи с задачами передачи и обработки квантовой информации, а также в применении к анализу физики квантовых процессов для наиболее фундаментальных моделей квантовых каналов.

Для более ясного понимания сути когерентной информации коротко рассмотрим процесс передачи информации через квантовый канал, на вход которого подано состояние системы, описываемое волновой функцией ψ_{in} и соответствующей ей матрицей плотности $\hat{\rho}_{in}$. После процесса передачи сообщения на выходе образуется новая волновая функция $\psi_{out}(t)$, зависящая от времени, с соответствующей $\hat{\rho}_{out}(t)$. В общем случае её вид определяется не только начальным состоянием поданным на вход канала, но и структурой передающей системы. Если система не замкнута, то во время трансляции она взаимодейству-

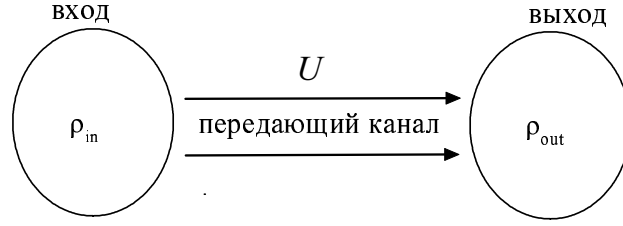


Рис. 1: Передача сообщения через канал без шумов.

ет со своим окружением, в результате чего часть энтропии S_{in} , которой обладало входное состояние с волновой функцией ψ_{in} уходит в окружение. Можно также сказать, что энтропия передаваемого состояния становится меньше в результате воздействия на систему шумов, создаваемых окружением. В результате, неискажённая энтропия уменьшается согласно формуле (4), определяя когерентную информацию. Пользуясь (4), можно также получить отрицательную информацию. Такой случай будет соответствовать настолько сильному влиянию шума на канал, что потеря неискажённой энтропии состояния (то есть, энтропия шума) будет превышать энтропию входного сообщения. Ни о какой когерентной информации, переданной каналом, в данном случае не может идти речи, поэтому разумнее всего принять её равной нулю. Таким образом, для правильного определения квантовой информации, к формуле (4) стоит добавить условие неотрицательности разности $S_{out} - S_e$, в противном случае квантовая информация обращается в нуль по определению. После всего сказанного встает вопрос метода расчёта энтропий S_{out} и S_e . Для ответа на него рассмотрим процесс трансляции более подробно.

В наиболее простом случае замкнутой системы окружение канала отсутствует, и при дальнейшем рассмотрении его влияние можно не учитывать. В силу отсутствия шумов передача состояния через информационный канал представляется в виде унитарного операторного преобразования матрицы плотности $\hat{\rho}_{in}$ этого сообщения (Рис. 1). При таком подходе матрица плотности $\hat{\rho}_{out}$ на выходе канала равна

$$\hat{\rho}_{out} = U \hat{\rho}_{in} U^{-1} \quad , \quad (5)$$

где U — унитарный оператор. Рассматривая матрицу $\hat{\rho}_{out}$, представим её, как и выше, в виде разложения по матрицам плотности $\psi_{out k} \psi_{out k}^+$ элементарных состояний. Тогда $\hat{\rho}_{out} = \sum_k p_{out k} \psi_{out k} \psi_{out k}^+$. Вероятности $p_{out k}$ представляют собой классические вероятности наблюдения данных элементарных состояний. В таком случае мы можем применить выводы классической теории информации Шеннона для определения энтропий входного и выход-

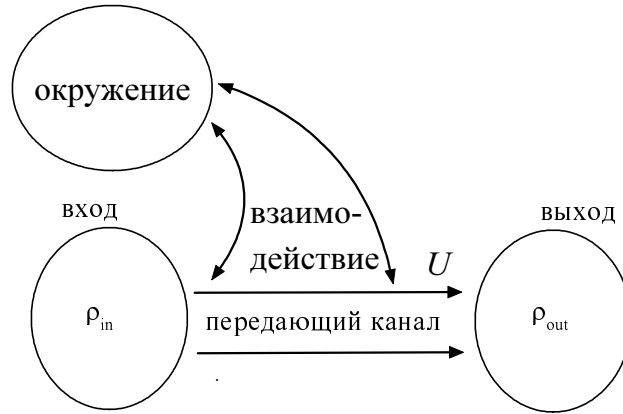


Рис. 2: Передача сообщения через канал с учётом шумов, создаваемых окружением.

ного состояния. В силу отсутствия шумов, $S_e = 0$, равенство $I_c = S_{out}$ и тождество

$$\sum_k p_{out k} \log p_{out k} \equiv \text{Tr} \hat{\rho}_{out} \log \hat{\rho}_{out} \quad (6)$$

совместно с уравнением (4) дают

$$I_c = -\text{Tr} \hat{\rho}_{out} \log \hat{\rho}_{out} \quad (7)$$

Так как когерентная информация I_c является функцией выходного состояния с матрицей плотности $\hat{\rho}_{out}(t)$, то, по идее, она должна зависеть от времени, прошедшего с начала передачи сообщения. Однако, свойство унитарного оператора U сохранять след преобразуемых матриц позволяет энтропии передаваемого сообщения оставаться постоянной в любой рассматриваемый момент времени. Поэтому в каналах без шума когерентная информация не зависит от времени. Таким образом, унитарность операторного преобразования канала говорит об отсутствии шумов, вносимых окружением в процесс передачи сообщения. Рассчитанная по формуле (7) информация I_c равна энтропии S переданного сообщения и является энтропией фон-Неймана этого сообщения.

Если же в рассматриваемом канале нельзя пренебречь влиянием окружения, необходимо рассматривать шумящую модель трансляции сообщения. Схематически её можно представить следующим образом (см. Рис. 2).

На рисунке видно, что такой процесс трансляции отличается от рассмотренного выше введением окружения, оказывающего влияние на качество передачи сообщения. Можно не рассматривать отдельно действие окружения на информационный канал, а просто включить его в операторное преобразование канала. Тогда вместо унитарного преобразования U

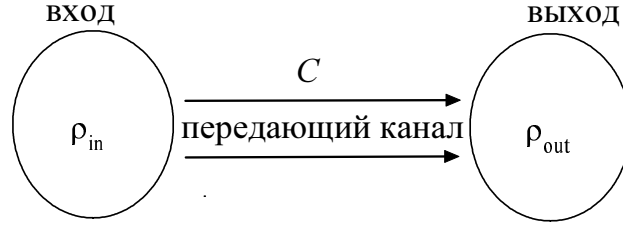


Рис. 3: Иллюстрация метода писания трансляции через шумящий канал с помощью операторного преобразования \mathcal{C} матрицы плотности входного состояния.

получим новое матричное преобразование шумящего канала \mathcal{C} (Рис. 3), которое уже не является унитарным, следствием чего следует ожидать изменение энтропии во время трансляции. Энтропия S_{out} при таком рассмотрении определяется аналогично выше-описанному случаю унитарного канала. Только при расчёте матрицы плотности $\hat{\rho}_{out}$ на выходе канала по формуле (5) вместо унитарного преобразования U нужно применить соответствующее супероператорное преобразование $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$, т.е. $\hat{\rho}_{out} = \mathcal{C}(t)\hat{\rho}_{in}$. Теперь, как и ожидалось, в общем случае будет иметь место зависимость энтропии S_{out} от времени передачи сообщения. Однако, отбрасывать рассмотрение окружения при исследовании шумящего канала нельзя, так как его энтропия S_e не равна нулю. Её необходимо определить, чтобы воспользоваться определением когерентной информации с помощью соотношения (4).

В [28] был разработан соответствующий подход к определению энтропии обмена между окружением и выходом канала. Суть его в следующем. Если мы будем рассматривать новое состояние, включающее состояние передаваемого сообщения и состояние окружения, то в этом случае будет реализовываться случай замкнутой системы, которая транслируется с помощью информационного канала без шумов. Только часть её при этом передаётся через другой внутренний канал \mathcal{C} , и эта трансляция является одним из процессов происходящих в обсуждаемой составной системе, остальные из которых нас не интересуют. Чтобы определить рассматриваемое “новое” состояние, нужно определить его матрицу плотности.

Её получают с помощью процесса очищения [28]. Очищенная матрица плотности определяется выражением

$$\hat{\rho}_p = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |i\rangle \langle j| \otimes |i\rangle^* \langle j|^* , \quad (8)$$

где λ_k — собственные значения, а $|i\rangle$ и $\langle j|$ — собственные левые и правые вектора матрицы плотности $\hat{\rho}_{in}$, и $|i\rangle^*$ и $\langle j|^*$ — векторы, комплексно сопряженные собственным. Система, совместно с которой входная информация в канале \mathcal{C} описывается матрицей $\hat{\rho}_p$, называется

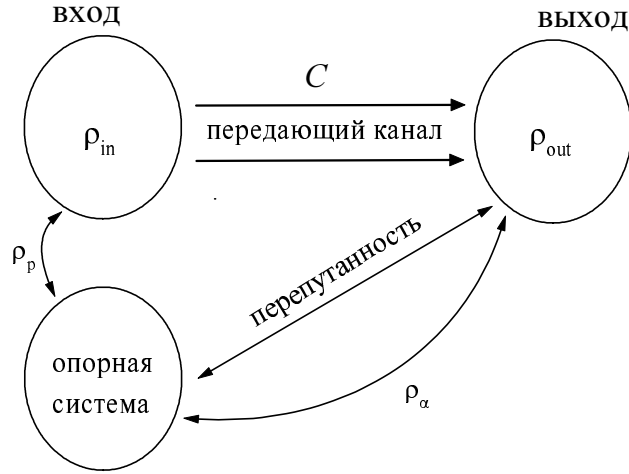


Рис. 4: Иллюстрация способа описания трансляции с помощью введения опорной системы.

опорной системой. Она представляет недостающую часть входной системы, необходимую для полного описания процесса трансляции. Совокупное состояние обеих систем является чистым и всегда может быть описано с помощью волновой функции. Преобразование системы в процессе трансляции сообщения по каналу \mathcal{C} можно представить схемой, приведённой на Рис. 4.

Матрица $\hat{\rho}_p$ преобразуется по закону

$$\hat{\rho}_\alpha = (\mathcal{C} \otimes \mathcal{I})\hat{\rho}_p, \quad (9)$$

где $\hat{\rho}_\alpha$ представляет собой совместную матрицу плотности, описывающую состояние составной системы, состоящей из выхода канала и опорной системы. Энтропию обмена разумно связать с этой составной системой. Её расчёт ничем не отличается от вышеприведенных вычислений, использующих формулу (5).

В результате расчёта энтропий S_{out} и S_e по известной формуле можно найти когерентную информацию, переданную по каналу. По сложившейся традиции когерентную информацию измеряют в кубитах. *Кубит*, как единица измерения появился, благодаря рассмотрению двухуровневых квантовых систем. Говорят, что когерентная информация равна 1 кубиту, если в результате передачи состояния двухуровневой системы через квантовый информационный канал на выходе получаем состояние с такой же размерностью гильбертова пространства, то есть с размерностью равной двум. Таким образом, в соответствии с определением кубита, когерентную информацию нормируют на $\log 2$. Проведя описанную нормировку энтропий, используемых в формуле (4), получим конечный результат для

определения когерентной информации. Обсуждаемая формула примет вид

$$I_c = -\text{Tr}\hat{\rho}_{out} \log_2 \hat{\rho}_{out} + \text{Tr}\hat{\rho}_\alpha \log_2 \hat{\rho}_\alpha . \quad (10)$$

При рассмотрении когерентной информации нужно понимать, что она не является мерой точности измерения переданного через информационный канал сообщения. Она служит для оценки другой, качественной, характеристики процесса. Являясь мерой размерности гильбертова пространства, транслируемого через канал без ошибок, она определяет, насколько точно была передана перепутанность транслируемого состояния входа с опорной системой. *Перепутанность* же входа с опорной системой есть мера неопределённости — энтропия — квантового состояния входа, рассматриваемого отдельно от опорной системы. Чем меньше вероятность системы оказаться в чистом состоянии, тем больше её перепутанность. При передачи сообщений через информационный канал начальная перепутанность находится в системе, состоящей из входной информации и опорной системы. После передачи состояние этой составной системы изменится, и в ней установится новая перепутанность — в форме квантовых корреляций выхода и опорной системы. Несмотря на то, что состояние стало другим, перепутанность его может остаться прежней (как, например, в случае канала без шумов), а может исчезнуть вовсе. Ясно, что чем лучше сохраняется перепутанность, тем более благоприятные условия обеспечивает информационный канал для проведения эксперимента, в котором взамен недоступного при рассматриваемых условиях эксперимента входа используются состояния выхода. Поэтому расчёт когерентной информации позволяет количественно описать эффективность эксперимента с помощью величины соответствующей ему когерентной информации.

3.4 Общие свойства совместимой информации

В то время как три первых типа информации — классическая, полуклассическая и относительно недавно введённая мера когерентной информации — хорошо известны в литературе [14, 22, 28], совместимая информация как особый тип информационной меры в явной форме введена лишь в самое последнее время [29]. Она определяется для составной двухсоставной системы с совместимыми квантовыми состояниями входа и выхода, включающими, однако, внутреннюю квантовую несовместимость. Как показывается в работе [29], традиционное определение энтропии Шеннона и соответствующей информационной меры может быть с успехом использовано для анализа квантовых систем при условии кор-

ректного учёта фундаментальных различий между ансамблями классических и квантовых событий, несмотря на то, что изначально оно основано на рассмотрении классических случайных величин.

Совместимая информация учитывает как чисто классические, так и специфически квантовые корреляции состояний входа и выхода, проявляющиеся в форме статистической связи между классическими результатами двух независимых измерений, выполняемых на входе и выходе квантового канала. Она характеризует информационную связь между входом и выходом в форме, допускающей копирование, в отличие от когерентной информации, которая должна быть уничтожена в одной физической системе, чтобы быть переданной в другую. Основой для введения совместимой информации является понятие шенноновского количества информации $I_{xy} = S_x - S_{x|y} = S_y - S_{y|x}$, являющейся взаимной информацией связи классических случайных величин x и y (п. 3.1).

При рассмотрении одномоментных средних значений квантовых физических величин внутренняя квантовая несовместимость проявляется просто как статистическая неопределённость, для учёта которой достаточно ограничиться введением эквивалентного классического распределения вероятностей. С использованием вероятностной меры

$$P(d\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho}_A | \alpha \rangle dV_\alpha \quad (11)$$

на множестве всех квантовых состояний, среднее значение любого оператора

$$\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle \langle n|$$

может быть представлено как $\langle \hat{A} \rangle = \sum \lambda_n dP/dV_\alpha(\alpha_n)$, где $|\alpha_n\rangle = |n\rangle$. Здесь dV_α описывает дифференциал объёма в пространстве физически различных состояний D -мерного гильбертова пространства H_A ($\int dV_\alpha = D$), которое для случая кубита (то есть, $D = 2$) представляется сферой Блоха [5]. Соотношение (11) есть среднее от операторной меры

$$\hat{E}(d\alpha) = |\alpha\rangle \langle \alpha| dV_\alpha \quad , \quad (12)$$

которая является специальным случаем неортогонального разложения единицы [30], или, иначе, положительной операторнозначной мерой (ПОМ, POVM) [31, 32].

ПОМ описывают соответствующую процедуру обобщённого квантового измерения, которое, в отличие от прямого измерения в исходной системе, описываемого ортогональным разложением единицы — ортопроекторной мерой, в H_A выполняется в составном про-

пространстве $H_A \otimes H_a$ с подходящим дополнительным пространством состояний H_a и совместной матрицей плотности вида $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_a$, которая не содержит никакой дополнительной информации об A сверх информации, уже содержащейся в матрице плотности $\hat{\rho}_A$.

Обобщённое квантовое измерение вида (12) переводит неопределённость, содержащуюся в системе A в форме квантовой несовместимости множества всех её квантовых состояний, в классическую статистическую неопределённость количественно эквивалентного множества совместимых событий в системе $A+a$. Разумеется, при таком представлении когерентные соотношения, характерные для исходной квантовой системы, преобразуются в соответствующие классические корреляции, которые уже не имеют никакой квантовой специфики. Тем самым результат такого измерения не является эквивалентом исходной системы с точки зрения возможностей выполнения дальнейших квантовых преобразований, что является неизбежной “платой” за представление информации в классической форме, допускающей её свободное использование. Тем не менее, исходные квантовые корреляции учитываются в статистике результирующих классических состояний.

Если заданы два гильбертова пространства H_A и H_B соответствующих квантовых систем A , B , то в них возможно задание совместного состояния двух систем в форме совместной матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$ в $H_A \otimes H_B$. В частности, пространства H_A и H_B могут соответствовать состояниям подсистем составной системы $A+B$, заданным в один и тот же момент времени t , т.е. могут рассматриваться как вход и выход абстрактного одномоментного квантового канала в реальной физической системе. При этом определяющим свойством состояний подсистем A и B является их совместимость, вытекающая из их одновременности. Совместное измерение, представленное двумя ПОМ как $\hat{E}_A \otimes \hat{E}_B$, не вводит никаких новых корреляций между входом и выходом и может рассматриваться как индикатор имеющихся в составной системе информационных соотношений между ними. Соответствующее совместное распределение вероятностей имеет вид:

$$P(d\alpha, d\beta) = \text{Tr} [\hat{E}_A(d\alpha) \otimes \hat{E}_B(d\beta)] \hat{\rho}_{AB}. \quad (13)$$

Соответствующая информация Шеннона

$$I = S[P(d\alpha)] + S[P(d\beta)] - S[P(d\alpha, d\beta)] \quad (14)$$

тогда определяет количество *совместимой* информации [29, 33]. Физическое содержание совместимой информации зависит от специфического выбора измерительной процедуры и

представляет квантовую информацию на выходе, доступную через посредство двух ПОМ, которые селективируют в форме классических носителей α и β информацию о квантовом состоянии входа, поступающую на выход.

Рассмотрим специальный случай, когда α и β индексируют все квантовые состояния в H_A и H_B в соответствии с конкретным видом обеих ПОМ в форме (12). В этом случае совместимая информация распределена по всем квантовым состояниям и ассоциирована со всей внутренней квантовой неопределённостью состояний входа, которая учитывается автоматически в распределении вероятностей (11). В частности, информация, содержащаяся в квантовых корреляциях, имеющих место в случае наличия квантовой перепутанности между A и B , также принята в расчёт в совместном распределении вероятностей (13). Кроме того, совместимая информация в данном случае обладает свойством *операционной инвариантности*, введённым в [34], то есть, все некоммутативные физические переменные учитываются в данной информационной мере равноценным образом. Описанное представление квантовой информации посредством классических распределений вероятностей может рассматриваться как развитие представлений квантовой механики в терминах классических физических переменных в приложениях к лазерной физике, обсуждавшееся ещё в лекциях Глаубера [35] (см. также [16]).

Далее по тексту будут приведены примеры расчёта когерентной и совместимой информации для простейших квантовых систем.

4 Пропускная способность Λ -системы

Для иллюстрации метода расчёта когерентной информации рассмотрим информационный канал, представленный моделью взаимодействия Λ -системы с полем свободных фотонов.

4.1 Необходимость теоретического рассмотрения Λ -системы

Как показывает опыт, свойства и поведение многих квантовых объектов, используемых различными экспериментальными группами в исследованиях, могут быть промоделированы с помощью Λ -системы.

Для пояснения этого рассмотрим процесс управления ионом ${}^9\text{Be}^+$, используемом при проведении экспериментов в Национальном Институте Стандартов и Технологий (Боулдер, США) [36]. Внутреннее состояние иона реализует двухуровневую систему, образованную

состояниями $|\downarrow\rangle = {}^2S_{\frac{1}{2}} |F = 2, M_F = 2\rangle$ и $|\uparrow\rangle = {}^2S_{\frac{1}{2}} |F = 1, M_F = 1\rangle$. Здесь F — полный угловой момент атома, M_F — его проекция на ось квантования, совпадающую с направлением внешнего слабого магнитного поля. Время жизни когерентности на переходе между уровнями $|\downarrow\rangle$ и $|\uparrow\rangle$ превышает 10 минут. В такой системе запись кубита информации осуществляется посредством воздействия на ион лазерного излучения, переводящего его, например, из состояния $|\downarrow\rangle$ на уровень ${}^2P_{\frac{1}{2}}$. При этом с состоянием $|\uparrow\rangle$ ничего не происходит. Уровень же ${}^2P_{\frac{1}{2}}$ может распадаться как обратно в $|\uparrow\rangle$, так и во второе возможное состояние $|\uparrow\rangle$, в соответствии с правилами межуровневых переходов. При правильном подборе характеристик лазерных импульсов можно получить состояние $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ системы с любыми напередзаданными коэффициентами α и β (при условии нормировки $\alpha^2 + \beta^2 = 1$). Во время перехода с уровня считывание информации происходит с помощью процесса проецирования данного состояния на одно из составляющих. Если в ходе измерения имеет место переход верхнего уровня ${}^2P_{\frac{1}{2}}$ в $|\downarrow\rangle$, то атом начинает осциллировать, совершая циклические переходы ${}^2P_{\frac{1}{2}} \leftrightarrow |\downarrow\rangle = {}^2S_{\frac{1}{2}} |F = 2, M_F = 2\rangle$, излучая при этом порядка 10^6 фотонов в секунду. При проецировании на состояние $|\uparrow\rangle$ излучения не наблюдается, так как в следствии правил отбора переход с уровня ${}^2P_{\frac{1}{2}}$ на $|\uparrow\rangle$ маловероятен. Таким образом, регистрируя фотоприёмником резонансную флуорисценцию либо её отсутствию можно сделать выводы о состоянии иона после измерения. Точность подобных результатов составляет порядка 90% [36].

Таким образом, эффективность использования атомов и ионов, активные уровни которых могут быть представлены Λ -системой, в экспериментах по исследованию квантовых объектов говорит о необходимости рассмотрения математической модели процессов взаимодействия такой системы с окружающими квантовыми и классическими объектами. Целью таких теоретических исследований является поиск новых возможных экспериментальных схем с целью использования квантовой природы рассматриваемых объектов для повышения точности и эффективности результатов измерений. Одновременно, необходимо развитие математической теории, которая позволит упростить описание свойств уже рассмотренных квантовых процессов и систематизировать полученные экспериментальные результаты.

Целью данной работы является расчёт пропускной способности квантового информационного канала, образованного Λ -системой и полем свободных фотонов в результате циклического возбуждения системы двумя короткими лазерными импульсами.

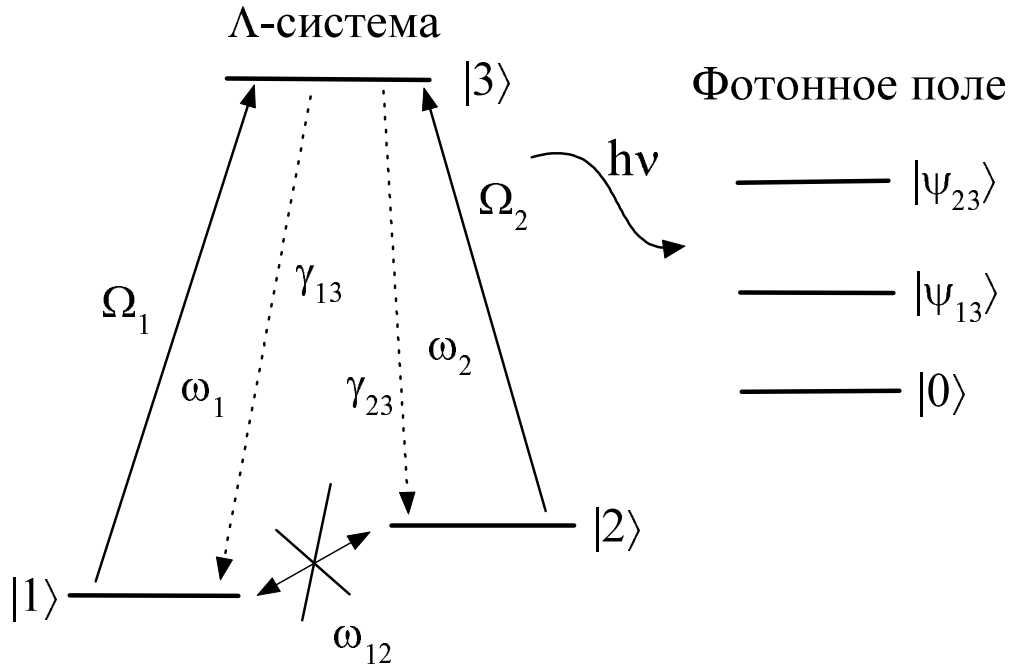


Рис. 5: Модель квантового информационного канала Λ -система — фотонное поле.

4.2 Описание процесса взаимодействия Λ -системы с фотонным полем

Выполняя описанные в пп. 3.3 действия по расчёту энтропий S_e и S_{out} , приходится сталкиваться с достаточно громоздкими вычислениями. Несколько упростить их помогает сочетание техники символического и матричного представления супероператоров [16], подробно описанное в работах [6, 37]. Для получения соответствующих деталей этого подхода, используемого ниже, следует обратиться к данным статьям.

В работах [13, 39] при рассмотрении канала Λ -система—фотонное поле рассматриваемая Λ -система представлена совокупностью трёх уровней $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, а поле свободных фотонов состояниями $|0\rangle$, $|\psi\rangle_{13}$ и $|\psi\rangle_{23}$ (Рис. 5). В дипольном приближении, в рамках которого мы будем в дальнейшем рассчитывать когерентную информацию, переход $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ является запрещённым. Поэтому появляется возможность длительного хранения информации на нижних уровнях, на которых в соответствии с вышеупомянутым определением (пп. 3.3) потенциально может быть запасен один кубит когерентной информации. Для её извлечения с помощью передачи по квантовому информационному каналу посредством излучения кванта света используется два возбуждающих лазерных импульса с близкими оп-

тическими частотами ω и ω' , удовлетворяющими условию рамановского резонанса [38]

$$\omega' - \omega \approx \omega_{12}, \quad (15)$$

где ω_{12} — частота перехода между нижними уровнями.

Чтобы осуществить максимально эффективное управление каналом, необходимо использовать лазерные импульсы, длительность которых не превышает времени распада γ^{-1} верхнего уровня. При таких длительностях появляется возможность рассматривать процессы возбуждения и релаксации независимо, что заметно облегчает как теоретические выкладки, так и численные расчёты. Возбуждённая таким образом Λ -система в процессе перехода в основное состояние излучает фотон, изменяя состояние фотонного поля. Излучение фотона уровнем $|3\rangle$ Λ -системы представляется в виде испускания суперпозиции двух фотонов, соответствующих переходам $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$ и $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$. После того, как возбуждение системы окончилось, наблюдается процесс релаксации. Понятно, излучение фотона произойдёт не сразу, а по истечении некоторого времени порядка γ^{-1} . Таким образом, и когерентная информация начнёт накапливаться не раньше данного временного интервала, во время которого скорость её накопления будет равна нулю. И наоборот, при больших временах наблюдения вероятность того, что фотон был испущен, близка к единице, из-за чего накопление информации происходит очень медленно. Необходимо найти момент, при котором отношение накопленной информации ко времени её накопления максимально, так как при циклическом процессе это значение понадобится для определения наиболее эффективного режима работы канала.

Если мы будем обрывать процесс передачи информации (то есть, будем препятствовать свободному переходу системы в основное состояние) в некоторый момент времени t (будем говорить, что к этому моменту осуществлён один такт передачи состояния по обсуждаемому информационному каналу) и записывать на нижние уровни Λ -системы новую информацию (осуществление такого процесса является непростой задачей [39], но здесь мы не рассматриваем технических деталей его реализации), впоследствии снова её считывая, то мы организуем непрерывную последовательность тактов работы канала по получению информации. Полная информация после n -ого такта определяется суммой полученных значений информации за каждый такт, которая, в следствии идентичности тактов равна n -кратному увеличению информации, накопленной за один такт, и определяется формулой

$$I_c^\Sigma(T) = n I_c(t) = n \frac{I_c(t) t}{t} = T v(t) . \quad (16)$$

Величину v , равную

$$v = \frac{I_c(t)}{t}, \quad (17)$$

назовём скоростью передачи информации, несмотря на то, что она не равна производной $\dot{I}_c(t)$. Из формулы видно, что полная когерентная информация накапливается наиболее быстро при максимальной скорости v передачи информации. Наибольшее значение v называется информационной пропускной способностью канала. Рассчитаем её значение, описывая начальное состояние системы, образованной двумя нижними уровнями с населённостями ρ_{11} и ρ_{22} , диагональной матрицей плотности с ненулевыми элементами ρ_{11} и $\rho_{22} = 1 - \rho_{11}$.

4.3 Результаты расчётов

Прежде чем определять скорость передачи когерентной информации по рассматриваемому каналу, необходимо рассчитать саму информацию и найти её зависимость от времени наблюдения процесса релаксации. Скорость передачи когерентной информации определяется по формуле (17). Подробное описание методов получения данных результатов можно найти в работах [13, 39].

На Рис. 6 приведены зависимости когерентной информации от времени излучения фотона при различных режимах возбуждения и релаксации Λ -системы. Зависимости скорости v передачи информации от времени излучения при тех же режимах реализации квантового канала показаны на Рис. 7. Пропускная способность определяется как максимум скорости передачи информации по всевозможным условиям, определяющим режим работы канала. Для симметричной Λ -системы (симметричность зависит от отношения $s = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ скоростей перехода системы из возбуждённого состояния в основные, для симметричной системы $s = 1$) она равна $0.18\gamma \left[\frac{\text{кубит}}{\text{сек}} \right]$ и достигается в момент времени $\gamma t = 2.6$.

5 Расчёт совместимой информации в экспериментальной схеме

В последнее время появляются работы по описанию и расчёту экспериментальных схем [5, 40] в терминах совместимой информации. Специфика использования данного вида информации вместо когерентной в практических приложениях очевидна в силу того, что сов-

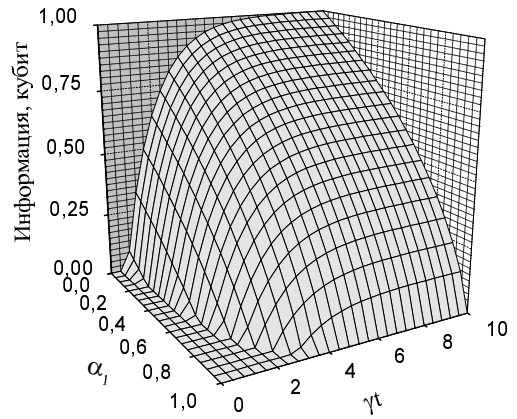
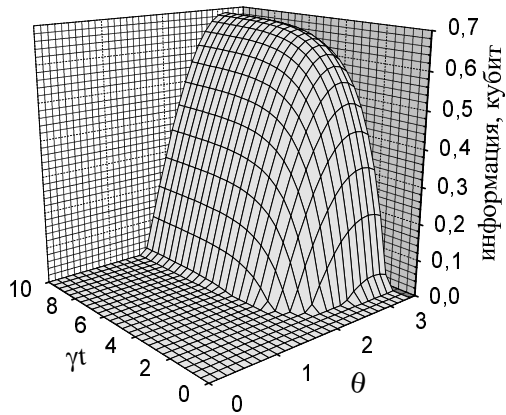


Рис. 6: Зависимость когерентной информации от безразмерного времени γt , полного угла действия $\theta = \Omega_R \tau$ возбуждающего импульса и параметра $\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$, определяющего несимметричность Λ -системы

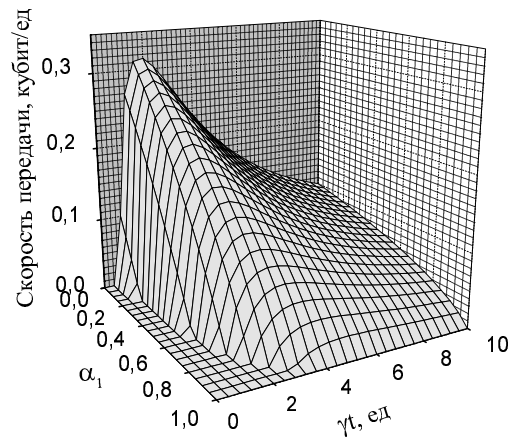
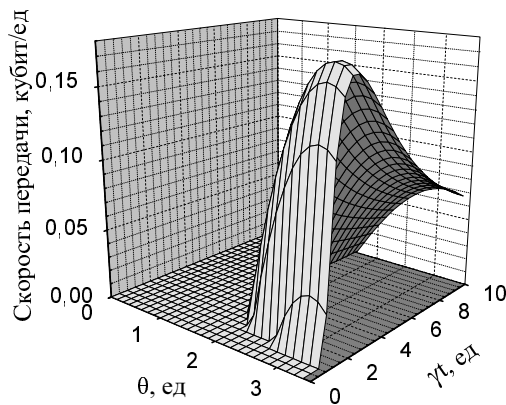


Рис. 7: Зависимость скорости передачи когерентной информации от безразмерного времени γt , полного угла действия $\theta = \Omega_R \tau$ возбуждающего импульса и параметра $\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$, определяющего несимметричность Λ -системы

местимая информация прямо связан с классическими величинами, полученными в результате измерений.

В дипломной работе в качестве измеряемого квантового объекта выбрана двухуровневая система. Подобный выбор был сделан не случайно. Двухуровневая система является наиболее простой теоретической моделью, описывающей поведение многих атомов, используемых в экспериментальных схемах. Они наиболее просты в управлении, и контроль над ними не является такой непосильной задачей, как над объектами с более сложной организацией активных уровней. В данной работе выбор двухуровневой системы в качестве измеряемого объекта, в первую очередь, позволит нам максимально упростить математические расчёты, которые, однако, даже в этом вырожденном случае оказываются отнюдь не тривиальными. Вторым аргументом в пользу рассмотрения двухуровневой системы является возможность качественно проследить за всеми характерными особенностями метода расчёта совместимой информации и его применения к описанию экспериментальных схем. В рассматриваемой далее задаче обсуждаются характеристики некоторой идеальной экспериментальной схемы, что представляет интерес, несмотря на очевидные технические трудности, стоящие на пути её практической реализации.

5.1 Блок-схема экспериментальной установки

Выполним расчёт совместимой информации, переданной по информационному каналу, представленному измерительной схемой на Рис. 8. Она соответствует эксперименту по определению дипольного момента атомного перехода двухуровневой системы при его резонансном возбуждении.

Пусть имеется двухуровневая система с точно известной частотой межуровневого перехода ω_{12} , но неизвестной величиной дипольного момента d_{12} . В результате производимых измерений нам требуется определить его величину. Осуществить это можно, измерив сначала, например, время жизни γ верхнего уровня $|2\rangle$ системы, а после по известной формуле (18) рассчитать дипольный момент перехода. Формула, связывающая величины γ и d_{12} имеет вид

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{d_{12}^2 \omega_{12}^3}{\hbar c^3} . \quad (18)$$

Возбуждение двухуровневой системы происходит посредством коротких лазерных импульсов с напряжённостью электромагнитного поля E и частотой, равной резонансной

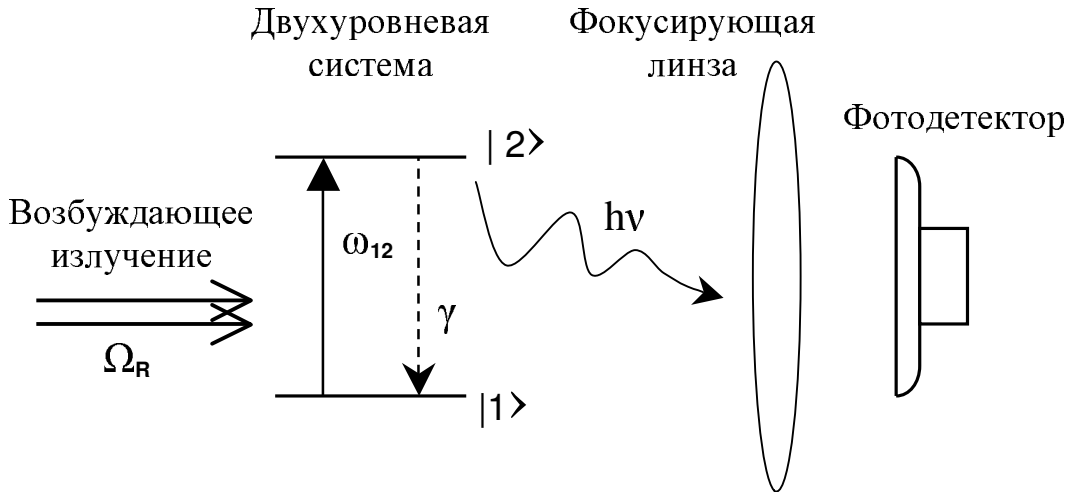


Рис. 8: Схема измерения дипольного момента атома. Двухуровневая система возбуждается коротким лазерным импульсом. Излучённый во время последующей релаксации фотон регистрируется фотодетектором. В ходе эксперимента измеряется характерное время жизни верхнего уровня системы γ .

частоте ω_{12} межуровневого перехода и длительностью $\tau \leq \gamma^{-1}$, которая предполагается значительно меньше времени жизни уровня $|2\rangle$. Тогда в течение времени τ система эволюционирует так, что при её описании можно не учитывать процесс релаксации, который начинается спустя характерное время γ^{-1} после начала возбуждения. После окончания действия импульса атом начинает переход на основной нижний уровень $|1\rangle$. Релаксируя, он излучает фотон (решение задачи о флуоресценции двухуровневого атома можно найти, например, в книге [16]). Квант света поступает на фотодетектор, представляющий собой счётчик попавших на него фотонов, показания которого пропорциональны их количеству. Для того, чтобы появилась возможность зарегистрировать как можно больший процент фотонов, между излучающей и улавливающей системами необходимо поставить фокусирующее устройство, собирающее поступающие на него кванты на небольшую поверхность детектора. Роль такого устройства в простейшем случае может играть, например, собирающая линза с апертурой S_0 . Однако, в дальнейшем будем полагать, что фотодетектором улавливаются абсолютно все фотоны, испущенные системой. В ходе эксперимента измеряется, был ли зарегистрирован фотодетектором фотон к моменту времени t . В зарегистрированном фотоне хранится информация о значении дипольного момента d межуровневого перехода. Используя эту информацию, мы определяем искомую величину d .

Управляющими параметрами, характеризующими условия проведения эксперимента являются амплитуда напряжённости возбуждающего поля E , длительность воздействия возбуждающего поля на атом τ и время t проведения измерения (отсчёт времени t начинается с момента окончания действия возбуждающего импульса). По данным параметрам должна производиться оптимизация экспериментальной схемы, основанная на результатах расчёта совместимой информации.

При дальнейшем рассмотрении эксперимента будем обозначать измеряемый дипольный момент исследуемой системы буквой a , а количество фотоотсчётов, зарегистрированных детектором — символом b . (Такое обозначение рассматриваемых переменных соответствует обозначениям, используемым в общей теории, описанной в [5]).

5.2 Схема математических расчётов

Для расчёта совместимой информации будем пользоваться общей формулой (14), приведённой в пп. 3.4, которая с учётом соотношений из раздела 3.1 принимает вид (3). Преобразуем формулу (3) так, чтобы в нашей задаче пользоваться ей было максимально удобно. Для этого вспомним известное из курса теории вероятности равенство (формула Байеса) $P(db, da) = P(db|a)P(da) = P(da|b)P(db)$. Здесь $P(da) = \mu(da)$ есть *априорное* распределение $\mu(da)$, выражающего нашу информацию о дипольном моменте системы до выполнения эксперимента. Вид распределения $\mu(da)$ непосредственно влияет на количество совместимой информации, полученной в ходе эксперимента. Например, при абсолютно точном знании дипольного момента ещё до начала измерений полученный объём информации заведомо равен нулю, так как конечное знание не отличается от начального. И наоборот, чем больше неопределённость и незнание того, какое значение должна иметь искомая величина, тем больше информации мы потенциально можем получить, так как даже любая грубая её оценка добавляет нам знаний, а стало быть и новую информацию, которой в дальнейшем мы сможем распорядиться по собственному усмотрению.

Теперь, подробно расписывая формулу (3) с учётом формулы Байеса, получим выражение для расчёта совместимой информации в обсуждаемой экспериментальной схеме

$$I = \int_A \int_B \log_2 \left(\frac{P(db|a)}{P(db)} \right) P(db|a) \mu(da) \quad .$$

Однако, в нашем случае величина b дискретна (так как определяет количество зарегистрированных детектором фотонов) и принимает значение либо 0, либо 1. Поэтому в данном

случае необходимо модифицировать эту формулу следующим образом:

$$I = \int_A \mu(da) \sum_{i=0}^1 \log_2 \left(\frac{P(b=i|a)}{P(b=i)} \right) P(b=i|a) . \quad (19)$$

Для конкретизации фигурирующих здесь параметров рассмотрим процесс эволюции атома во время возбуждения. Действие прямоугольного короткого импульса (длину импульса τ возьмём заведомо меньше времени жизни верхнего уровня $|2\rangle$ системы) описывается частотой Раби

$$\Omega_R = \frac{Ed}{\hbar} .$$

Если в начальный момент времени система находилась в нижнем состоянии $|1\rangle$, то в зависимости от величины $\Omega_R \tau$ после окончания действия поля система может оказаться либо в возбуждённом состоянии (если $\Omega_R \tau = \pi$), либо в основном (при условии $\Omega_R \tau = 2\pi$), либо в суперпозиционном. Процесс возбуждения будем описывать с помощью лиувиллиана взаимодействия лазерного поля с двухуровневым атомом. Определение и основы применения супероператорной техники подробно описаны в [16]. Здесь же рассмотрим только ту её часть, которая необходима для вычислений.

Матрицу плотности $\hat{\rho}$, описывающую состояние двухуровневой системы, представим с помощью четырёхмерного вектора $\vec{w} = (w_0, w_1, w_2, w_3)$, определяющего её разложение по матрицам $\hat{E}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$, образующим базис h . При этом матрица плотности $\hat{\rho}$ восстанавливается из четырёхмерного вектора \vec{w} посредством следующей операции

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^3 \vec{w}_i h_i \quad (20)$$

Леувиллиан взаимодействия \hat{L} имеет вид четырёхмерной матрицы

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & \Omega_R \\ 0 & 0 & -\Gamma & -\delta \\ 0 & -\Omega_R & \delta & -\Gamma \end{pmatrix} . \quad (21)$$

Состояние системы после воздействия лазерного импульса рассчитывается по формуле

$$\vec{w}(\tau) = \hat{L} \vec{w}(0) , \quad (22)$$

где $\vec{w}(0)$ — матрица плотности в начальный момент времени. Расчёт матрицы $\hat{\rho}(\tau)$ можно провести, воспользовавшись формулой (20). Населённости уровней $|1\rangle$ и $|2\rangle$ будут определяться соответственно её диагональными элементами ρ_{22} и $\rho_{11} = 1 - \rho_{22}$.

После окончания действия импульса система начнёт релаксировать, переходя в основное состояние и излучая при этом квант света. Вероятность излучения фотона, при условии нахождения системы в возбужденном состоянии $|2\rangle$, будет равна $1 - e^{-\gamma t}$. Отсюда получаем вероятность обнаружить детектором испущенный фотон

$$P(b = 1) = \rho_{22}(1 - e^{-\gamma t}) = \rho_{22} - \rho_{22}e^{-\gamma t} ,$$

а вероятность его не обнаружить (в случае, когда возбуждающий импульс не перевёл систему в верхнее состояние)

$$P(b = 0) = (1 - \rho_{22}) + \rho_{22}e^{-\gamma t} = 1 - \rho_{22}(1 - e^{-\gamma t}) = 1 - \rho_{22} + \rho_{22}e^{-\gamma t} .$$

И, наконец, для расчёта совместимой информации по формуле (19) осталось выбрать априорное распределение $\mu(da)$ об измеряемом дипольном моменте. Будем предполагать, что изначально мы не имеем никаких экспериментальных данных. Однако, мы априори имеем тот факт, что переход принадлежит атому и лежит в определённом спектральном диапазоне — оптической области частот $\sim 10^{15}$ сек $^{-1}$. Тогда получаем, что максимально возможную скорость распада верхнего уровня разумно связать с максимальными значениями, наблюдаемыми для ридберговских атомов и принять $\gamma = 10^{13}$ сек $^{-1}$. По формуле (18) рассчитываем максимально достижимый дипольный момент системы. Он получается равным порядка 10^{-15} ед. СГС = 1000 дебай. Воспользовавшись данными рассуждениями, получим, что наше априорное знание о дипольном моменте атомного перехода двухуровневой системы можно выразить формулой (23)

$$\mu(da) = \frac{da}{d_{\max}} , \quad (23)$$

где $d_{\max} = 1000$ дебай — максимально возможная величина дипольного момента. Однако, в силу того, что точно указать для любых мыслимых ситуаций конкретную границу для дипольного момента невозможно, представляет интерес рассмотреть значение d_{\max} её как независимый параметр задачи.

5.3 Обсуждение полученных результатов

Определим основные единицы измерения, в которых удобно работать в дальнейшем. Дипольный момент будем измерять в безразмерных единицах, нормированных на типичную

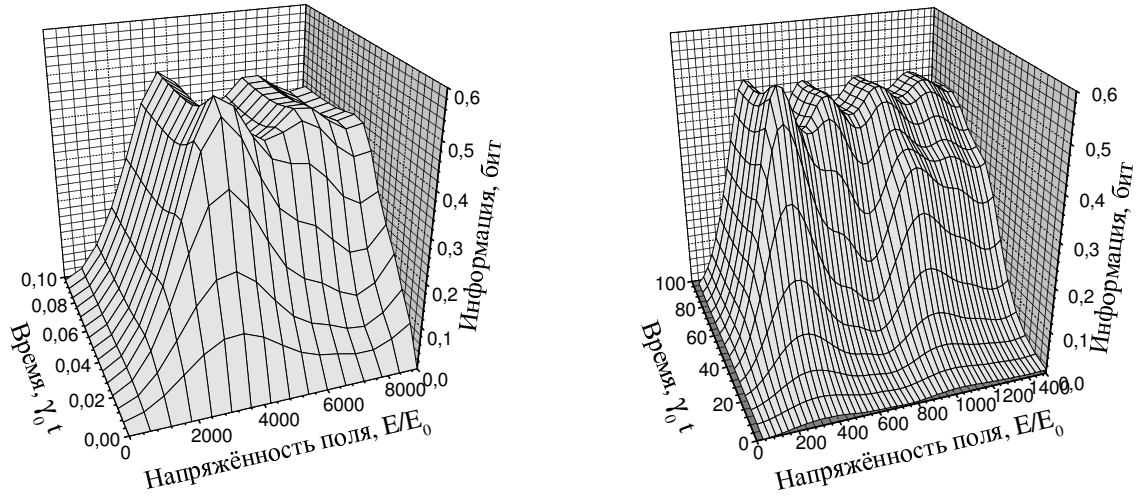


Рис. 9: Зависимость совместимой информации от напряжённости возбуждающего импульса E и времени наблюдения процесса излучения t для двух различных априорных распределений $\mu(da) = \frac{da}{10d_0}$ и $\mu(da) = \frac{da}{1000d_0}$ при длительностях возбуждающего импульса $\gamma_0\tau = 10^{-4}$ и $\gamma_0\tau = 10^{-7}$ соответственно.

величину атомного дипольного момента $d_0 = 1$ дебай $\sim 10^{-18}$ ед. СГС. Время представим в безразмерных величинах $\gamma_0 t$. При этом значение γ_0 рассчитаем по формуле (18), как скорость релаксации верхнего уровня для двухуровневой системы с дипольным моментом межуровневого перехода равным d_0 . Тогда $\gamma_0 \sim 10^7 c^{-1}$. Интенсивность лазерного импульса нормируем на единицу E_0 , величина которой равна интенсивности поля лазерного импульса длительностью $\gamma_0\tau = 0.1 \ll 1$, необходимого для возбуждения двухуровневой системы с дипольным моментом d_0 из основного состояния в верхнее. Условием возбуждения является выполнение соотношения $\Omega_{R\tau} \sim 1$, что достигается при $E_0 \sim 0.1$ ед. СГС. Такое переопределение единиц измерения требуется для более наглядного представления расчётных данных.

Теперь обратимся к зависимости количества совместимой информации, извлечённой при измерении, от условий проведения эксперимента. На Рис. 9 представлен её зависимость от напряжённости E поля возбуждающего импульса и времени t наблюдения процесса излучения фотона. На обоих графиках видно присутствие максимума количества совместимой информации в зависимости от времени t при фиксированной величине интенсивности лазерного импульса E . Они достигаются на временах порядка $\gamma_0 t = 1$ и $\gamma_0 t = 10^{-4}$ для разных априорных распределений. Положение данных максимумов определяет наиболее эф-

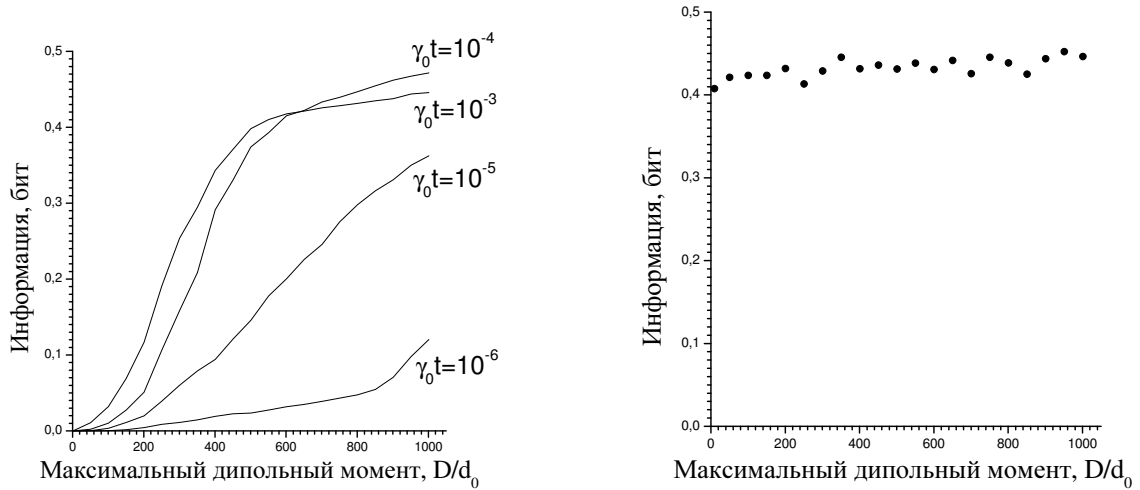


Рис. 10: Зависимость совместимой информации от значения D , входящего в распределение $\mu(da) = \frac{da}{d_{\max}}$ при $\gamma_0\tau = 10^{-7}$ для левого графика и при $\gamma_0\tau = 0.1 \frac{d_0^2}{d_{\max}^2}$ для правого

фактивные условия для проведения измерений. Также из графиков видно, что при больших временах наблюдения излучения $\gamma_0 t \gg 1$ извлечённая информация остаётся практически постоянной, что говорит том, что нет необходимости в выборе слишком больших времён проведения эксперимента.

Одновременно примечательным является тот факт, что при фиксированном значении t количество переданной информации осциллирует в зависимости от интенсивности возбуждающего импульса, действующего на систему. Объяснение данной особенности можно получить, рассуждая следующим образом. Если величина E достаточно велика ($\Omega_R\tau \gg 1$), то за время τ импульс успеваает не только возбудить систему, но и вернув её в первоначальное состояние, начать возбуждение заново. Таким образом, населённость верхнего уровня начинает осциллировать. И во время окончания действия импульса принимает какое-то значение. Для разных значений интенсивности возбуждающего поля оно будет разным. Однако, как следует из (19) населённость верхнего уровня ρ_{22} оказывает прямое влияние на количество информации переданной во время измерения. Отсюда ясно, что наблюдаемые осцилляции количества совместимой информации связаны именно с обсуждаемыми колебаниями населённости верхнего уровня.

Для дальнейшего анализа полученных результатов рассмотрим зависимость совместимой информации от вида априорного распределения $\mu(da)$, представленную на Рис. 10. На левом рисунке видно, что количество совместимой информации будет иметь разные зна-

чения в зависимости от выбора различных априорных распределений. Смысл этой зависимости состоит в следующем. Действие электромагнитного поля на двухуровневый атом описывается частотой Раби Ω_R , которая пропорциональна величине дипольного момента межуровневого перехода. Значит, при достаточно малой величине d условие $\Omega_{RT} \sim 1$ нарушится, атом не успеет возбудиться и населённость верхнего уровня окажется близкой к нулю. И если данные рассуждения верны для всех возможных значений d , учитываемых в распределении $\mu(da)$, то в этом случае количество совместимой информации, рассчитываемое по формуле (19) будет очень мало, так как оно непосредственно зависит от величины ρ_{22} .

Отсюда следует, что если искомое значение дипольного момента мало, то определить его не удастся, так как невозбуждённый атом излучить фотон не сможет, что сделает невыполнимым проведение измерений. Однако, это не означает, что совместимая информация в эксперименте не извлекается. Наоборот, если до его начала мы предполагали, что искомое значение дипольного момента атома лежит в интервале $[0, d_{\max}]$, а оно оказалось настолько меньше d_{\max} , что мы не смогли его измерить, это означает, что у нас появилась информация об области нахождения дипольного момента системы. То есть появилось новое, уточнённое — *апостериорное* — знание об измеряемой величине, т.е. определённый объём информации был получен. Однако, если же нам заранее известно, что дипольный момент системы имеет значение настолько меньшее величины d_{\max} , что из эксперимента мы заведомо не вынесем никаких новых сведений, то тогда совместимая информация при этом будет равна нулю. Для получения ненулевой информации требуется увеличить время воздействия импульса τ , так как при априори малых значениях дипольного момента скорость распада γ мала.

В подтверждение данных результатов на правом графике Рис. 10 приведена зависимость совместимой информации величины d_{\max} при времени возбуждения τ , зависящем от априорного распределения дипольного момента системы по формуле $\tau = 0.1 \frac{d_0^2}{d_{\max}^2 \gamma_0}$. При выбранных длительностях τ возбуждающий импульс успевает перевести систему в верхнее состояние. Поэтому и количество совместимой информации, рассчитанной для разных величин d_{\max} оказывается примерно одинаковой. При этом фактически приобретённая информация относится только к области значений дипольных моментов, по порядку величины совпадающих с максимально возможным значением.

6 Выводы

1. В работе исследованы приложения теории квантовой информации к анализу квантовых измерительных систем на примере расчёта когерентной и совместимой информации для моделей квантового канала в форме Λ -системы и двухуровневой системы, взаимодействующих с фотонным полем.
2. Построены и проанализированы зависимости скорости передачи когерентной информации от параметров, определяющих процесс трансляции информации через квантовый канал. Определено понятие пропускной способности Λ -системы и рассчитано её численное значение.
3. Рассчитано количество совместимой информации, извлекаемой в ходе измерения дипольного момента межуровневого перехода двухуровневой системы как функция параметров эксперимента. Проведён анализ зависимости совместимой информации от вида априорного распределения вероятностей.

7 Благодарности

В завершении работы хочу выразить благодарность всем людям, непосредственная и своевременная помощь которых существенно повысила эффективность изучения мной предмета квантовой информации. Особенно большое спасибо Борису Андреевичу Гришанину, направлявшему меня в исследованиях. Также благодарен Виктору Николаевичу Задкову за ряд полезных замечаний и моральную поддержку моей работы.

Список литературы

- [1] См., например, Садбери А. *Квантовая механика и физика элементарных частиц*. — М.: Мир, 1989, глава 5.
- [2] См, например, Баргатин И. В., Гришанин Б. А., Задков В. Н. *Запутанные квантовые состояния атомных систем* //УФН, 2001, **171**, вып. 6, с. 625–647
- [3] Kitagawa M., Ueda M. *Squeezed spin states* //Phys. Rev., 1993, **A 47**, p. 5138

- [4] Gisin N., Ribordy G., Tittel W., Zbinden H. *Quantum Cryptography* //LANL e-print, 2001, quant-ph/0101098
- [5] Grishanin B. A. and Zadkov V. N. *Coherent and compatible information: a basis to information analysis of quantum systems* //Proc. SPIE, V. 4750, *ICONO 2001: Quantum and Atomic Optics, High Precision Measurements in Optics, and Optical Information Processing, Transmission and Storage*, S. N. Bagaev, S. S. Chesnokov, A. S. Chirkin and V. N. Zadkov Eds, p. 54–63.
- [6] Grishanin B. A. and Zadkov V. N. *Coherent-information analysis of quantum channels in simple quantum systems* //Phys. Rev., 2000, **A 62**, p. 032303
- [7] Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L. and Popescu S. *Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels* //Phys. Rev. Lett., 1998, **80**, p. 1121
- [8] Kim Y. H., Kulik S. P., Shih Y. *Quantum Teleportation with a Complete Bell State Measurement* //Phys. Rev. Lett., 2001, **86**, p. 1370
- [9] Mattle K., Weinfurter H., Kwiat P. G. and Zeilinger A. *Dense Coding in Experimental Quantum Communication* //Phys. Rev. Lett., 1996, **76**, p. 4656
- [10] Bennett C. H., Shor P. W., Smolin J. A. and Thapliyal A. V. *Entanglement-Assisted Classical Capacity of Noisy Quantum Channels* //Phys. Rev. Lett., 1999, **83**, p. 3081
- [11] Валиев К. А., Кокин А. А. *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001
- [12] Ельяшевич М. А. *Атомная и молекулярная спектроскопия* — М.: Эдиториал УРСС, 2001
- [13] Бокарев Д. П. *Информационная пропускная способность Λ -системы* //Курсовая работа за 4 курс, 2000, Физический факультет МГУ
- [14] Галлагер Р. *Теория информации и надёжная связь* — М.:Сов. Радио, 1974
- [15] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* — М.:Наука, 1970

- [16] Гришанин Б. А. *Квантовые случайные процессы* — курс находится в интернете по адресу: <http://comsim1.phys.msu.su/publications/papers/bagbook.ps.gz>
- [17] Shannon C. E. //Bell Syst. Tech. J., 1948, **27**, p. 379
- [18] Brukner C., Zeilinger A. *Operationally Invariant Information in Quantum Measurements* //Phys. Rev. Lett., 1999, **83**, p.3354–3357
- [19] Hall M. J. W. *Comment on “Conceptual Inadequacy of Shannon Information ...” by C. Brukner and A. Zeilinger* //LANL e-print, 2000, quant-ph/0007116
- [20] Brukner C., Zeilinger A. *Quantum Measurement and Shannon Information, A Reply to M. J. W. Hall* //LANL e-print, 2000, quant-ph/0008091
- [21] Стратонович Р. Л. *Теория информации*. — М.:Сов. Радио, 1975
- [22] Холево А. С. //Проблемы передачи информации, 1973, **9**, с. 31
- [23] Hall M. J. W. *Quantum information and correlation bounds* //Phys. Rev., 1997, **A 55**, p. 100
- [24] Rudolph T. *Quantum Information is physical too ...* , //LANL e-print, 1999, quant-ph/9904037
- [25] Jones K. R. W. *Fundamental limits upon the measurement of state vectors* //Phys. Rev., 1994, **A 50**, p. 3682
- [26] Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A. (Eds) *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation* — New York: Springer, 2000
- [27] Steane A. //Rep. Prog. Phys., 1998, **61**, p. 117
- [28] Schumacher B. W. and Nielsen M. A. *Quantum data processing and error correction* //Phis. Rev., 1996, **A 54**, p. 2629
- [29] Гришанин Б. А. *Совместимая информация как естественная информационная мера квантового канала* //Проблемы передачи информации, 2002, **38**, № 1, с. 31–34

- [30] Гришанин Б. Ф. *Некоторые методы решения квантовых задач обнаружения и измерения* //Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1973, **11**(5), с. 127–137
- [31] Preskill J. *Lecture notes on Physics 229: Quantum information and computation* — лекции находятся в интернете по адресу: <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>
- [32] Менский М. Б. *Квантовые измерения и декогеренция* — М: Физматлит, 2001
- [33] Grishanin B. A. and Zadkov V. N. *Compatible Information as a Natural Information Measure of a Quantum Channel* //Laser Physics, 2001, **11**, No. 12, p. 1324–1331
- [34] Brukner C., Zeilinger A. *Operationally Invariant Information in Quantum Measurements* //Phys. Rev. Lett., 1999, **83**, p. 3354
- [35] Glauber R. J. (Eds DeWitt C., Blandin A. and Cohen-Tannoudji C.) *Quantum Optics and Electronics*, — New York: Gordon&Breach, 1965
- [36] Wineland D. J. et al. //J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech., 1998, **103**, с. 259
- [37] Гришанин Б. А., Задков В. Н. *Простые квантовые системы как источник когерентной информации* //ЖЭТФ, 2000, **118**, вып. 5, с. 1048–1065
- [38] Arimondo E. //in Progress in Optics, Wolf E. Edt (Elsevier,Amsterdam), 1996, **35**, p. 257
- [39] Grishanin B. A. and Zadkov V. N., *The Information Capacity of the Λ -System–Photon Field Channel* //Laser Physics, 2000, **10**, No. 6, p. 1280–1285
- [40] Гришанин Б. А., Сыч Д. В. *Совместимая квантовая информация в задаче Дике* //Вестник Московского Университета, 2002, **3**, № 4, с. 37–42.
- [41] Мандель Э., Вольф Л. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* — М.: Физматлит, 2000