Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов

Курсовая работа
студента 526 группы Сыча Дениса Васильевича

Расчет совместимой информации в задаче Дике

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Б.А. Гришанин

Москва, 19 июня 2001 г.

Содержание

1 Введение

Есть все основания ожидать, что по сравнению с информацией Шеннона в приложении к физике роль квантовой информации будет значительно более существенной. В то время как в классической физике информационная ёмкость каналов, возникающих в процессе выполнения физического измерения, обычно может быть и без специальных расчетов оценена хотя бы по порядку величины, это далеко не так в квантовом случае. Особенно важным представляется анализ потенциально доступной квантовой информации при постановке экспериментов в области новейших направлений физики, связанных с квантовыми вычислениями, проблемами квантовой связи и квантовой криптографии [1, 2, 9, 4], где именно мера квантовой информации используемого физического канала определяет потенциальную информативность полученных данных.

Совместимая информация является важной и наиболее общей характеристикой квантовых каналов, в которых квантовое перепутывание состояний не затрагивает структуры пространства состояний информационной системы как тензорного произведения пространств состояний входа и выхода [3]. Она учитывает как чисто классические, так и специфически квантовые корреляции в пространствах состояний входа и выхода. В частном случае совместимая информация основана на одновременных, т.е. гарантированно совместимых обобщенных измерениях, выполняемых на входе и выходе квантового канала. Измерения представляются в виде тензорного произведения $\hat{E}_A \otimes \hat{E}_B$ положительных операторных мер (ПОМ) $\hat{E}_A$ и $\hat{E}_B$, являющихся математическим представлением квантового измерения [2]. В частном случае эти измерения связаны с классическими множествами индексов всех квантовых состояний входного и выходного квантовых гильбертовых пространств. Результат такого измерения представляется классическим распределением вероятностей, характеризующем информационное соответствие между состояниями входа и выхода, и зависит, при каждом выбранном типе измерений, только от совместной матрицы плотности. Данному распределению вероятностей соответствует количество информации Шеннона [7], которое и задает соответствующую совместимую информацию. В настоящей работе рассматривается задача Дике [8]. Зная её решение в виде совместной матрицы плотности можно вычислить соответствующее количество совместной информации и проанализировать её зависимость от параметров задачи.

2 Определения

2.1 Определение совместимой информации

Основой для введения совместимой информации является понятие шенноновского количества информации $I_{xy} = S_x - S_{x|y}$, являющейся взаимной информацией связи случайных величин x и y [7]. Её можно интерпретировать как количество информации об x, содержащейся в y. Энтропия непрерывной случайной величины определяется как $S_x = -\int\limits_X p(x) ln \frac{p(x)}{\nu_0(x)} dx$, где $p(x)$ — плотность распределения случайной величины x, $\nu_0(x)$ — вспомогательная плотность концентрации точек, в которых задана $p(x)$, удовлетворяющая нормировке $\int\limits_X \nu_0(x) dx = N$, где N — общее число точек, которое можно положить равным 1 [10].

Используя соотношение для условной энтропии $S_{x|y} = S_{xy} - S_y$, можем записать шенноновскую информацию в виде $I_{xy} = S_x + S_y - S_{xy}$, откуда видна её симметричность относительно перестановки x и y местами.

Совместимая информация определяется аналогичной шенноновской информации формулой, но с иным распределением вероятностей $P(d\alpha, d\beta)$:

$$I = I(P(d\alpha, d\beta)) = S(P(d\alpha)) + S(P(d\beta)) - S(P(d\alpha, d\beta)).$$

2.2 Определение совместной плотности распределения

Пусть заданы два гильбертовых пространства состояний H_A и H_B квантовых систем A и B, совместная матрица плотности ρ_{AB} и два обобщенных квантовых измерения в системах A и B, представленных соответствующими ПОМ $\hat{E}_{d\alpha}$ и $\hat{E}_{d\beta}$. Применяя стандартную процедуру квантового усреднения $\langle \hat{A} \otimes \hat{B} \rangle = Tr(\hat{A} \otimes \hat{B})\hat{\rho}_{AB}$, заданную для любой пары эрмитовых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, получаем совместное классическое распределение вероятностей [3]:

$$P(d\alpha, d\beta) = Tr\left(\hat{E}_A \otimes \hat{E}_B\right)\hat{\rho}_{AB}.$$

Для дальнейшего определения совместной информации необходимо уточнить процедуру квантового измерения, т.е. задание конкретного вида ПОМ $\hat{E}_{d\alpha}$. В общем случае это может быть произвольное разложение единицы, например выбор $\hat{E}_{d\alpha} = \hat{E}_k = |k\rangle\langle k|$, где $k = 0, 1$ соответствует классическому измерению состояний. Но при таком определении ПОМ возникают выделенные классические состояния $|0\rangle, |1\rangle$, что не учитывает квантовую специфику задачи. Поэтому адекватной информационной характеристикой квантовой системы будет являться только инвариантное относительно унитарных преобразований состояний системы выражение. Такому требованию отвечает выбор *неселективного* измерения, равноправно учитывающего все квантовые состояния, с соответствующей ПОМ $\hat{E}_{d\nu} = |\nu\rangle\langle\nu| dV_\nu$, где индекс ν нумерует все чистые квантовые состояния системы, а dV_ν — вспомогательная плотность, удовлетворяющая нормировке $\int dV_\nu = D$ (D — размерность пространства состояний системы). В нашей задаче пространство состояний представляется двумерной сферой Блоха, и индекс ν пробегает все чистые квантовые состояния на этой сфере. Соответствующее ν состояние — вектор на сфере Блоха: $|\nu\rangle = \{\cos(\frac{\theta}{2}), e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})\}$ и $dV_\nu = \frac{sin(\frac{\theta}{2})}{2\pi}$, где θ и φ — полярный и азимутальный углы, $\theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi)$. Совместное распределение вероятностей при такой конкретизации равно:

$$P(d\alpha, d\beta) = \langle\alpha| \langle\beta| \hat{\rho}_{AB} |\beta\rangle |\alpha\rangle dV_\alpha dV_\beta.$$

3 Характерные значения совместимой информации

Для оценки характерных значений совместимой информации в произвольных физических системах следует выделить среди всевозможных двухчастичных матриц плотности ρ_{AB} некоторые важные частные случаи и получить соответствующие им количества совместимой информации I.

1) Состояние системы — чистое, и матрица плотности $\rho_{AB} = \Psi_{AB}\Psi^*_{AB}$. Далее, состояние Ψ_{AB} может быть перепутанным либо нет. Два крайних случая — максимально перепутанное состояние, например $\Psi_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}$, и независимое $\Psi_{AB} = \Psi_A\Psi_B$. Для максимально перепутанного состояния известно аналитическое выражение [9] $I = 1 - \frac{1}{\ln(4)} \simeq 0.27865$, а для независимого $I = 0$. Вообще, для случая независимых подсистем A и B, когда $\rho_{AB} = \rho_A\rho_B$, количество совместимой информации, очевидно, рано нулю, т.к. в таком случае $S(P(d\alpha, d\beta)) = S(P(d\alpha)) + S(P(d\beta))$.

2) Состояние системы — смесь двух равновероятных чистых классических состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$. В таком случае совместимая информация отражает чисто классические корреляции, связывающие индексы состояний двух подсистем, и равна [3] $I \simeq 0.086$. Этот удивительных факт столь малого количества информации для системы, отражающей состояние классического бита, объясняется тем, что используется неселектированное измерение, равноправно учитывающее все квантовые состояния системы, а классические состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ — это всего лишь одни из них. При усреднении проекции этого состояния на все состояния системы и получается такая малая величина для количества информации.

Результаты расчетов неселектированной совместимой информации показывают, что она меняется в пределах от 0 для независимых подсистем до максимального значения $\simeq 0.278$ для полностью перепутанных подсистем. Подробный анализ зависимости количества совместимой информации от степени препутанности приведен в работе [3]. Следует отметить, что минимально возможное значение совместной информации при любом типе измерений равно нулю, т.к. условная энтропия не может превосходить безусловную. Максимально возможное значение информации равно 1 и достигается в случае селектированного измерения. Таким образом, зная численное значение информации, можно говорить о характере состояния системы.

4 Задача Дике

Рассмотрим процесс излучения одного атома, находящегося вблизи другого, изначально невозбужденного атома. Решение этой задачи хорошо известно в терминах двух распадающихся со временем состояний Дике [5] (симметричного $|s\rangle = \frac{|1\rangle\,|2\rangle + |1\rangle\,|1\rangle}{\sqrt{2}}$ и антисимметричного $|a\rangle = \frac{|1\rangle\,|2\rangle - |1\rangle\,|1\rangle}{\sqrt{2}}$) и стабильного вакуумного состояния $|0\rangle = |1\rangle\,|1\rangle$:

$$\begin{array}{l} |dicke\rangle = c_s(t)\,|s\rangle + c_a(t)\,|a\rangle + c_0(t)\,|0\rangle, \\ c_s(t) = c_s(0)e^{-(\gamma_s/2+i\Lambda)t}, \quad c_a(t) = c_s(0)e^{-(\gamma_a/2-i\Lambda)t}, \\ c_0(t) = c_0(0) + \sqrt{c_s^2(0) + c_a^2(0) - c_s^2(t) - c_a^2(t)}e^{i\xi(t)}, \end{array}$$

где $c_{s,a}(t)$ — комплексные амплитуды состояний Дике, $c_0(t)$ — комплексная амплитуда вакуумной компоненты $|1\rangle\,|1\rangle$, включающая некогерентную добавку, обусловленную спонтанными радиационными переходами с возбужденных атомных состояний, $\xi(t)$ — равномерно распределенная фаза атомных колебаний, $\gamma_{s,a}$ — скорости распада, Λ — частотный сдвиг.

Для конкретизации задачи далее мы рассмотрим случай двух идентичных атомов с параллельными дипольными моментами, направленными перпендикулярно вектору, соединяющему рассматриваемые атомы. В данном случае существенны только два безразмерных параметра: безразмерное время γt, где γ описывает скорость радиационного распада изолированного атома, и безразмерное межатомное расстояние $\varphi = k_0 R$, где R — расстояние между атомами и k_0 — модуль волнового вектора, соответствующего частоте перехода с уровня $|1\rangle$ на уровень $|2\rangle$ изолированного атома. Безразмерные двухатомные скорости радиационного распада и частотного сдвига за счет короткодействующего диполь–дипольного взаимодействия описываются следующими соотношениями:

$$\frac{\gamma_{s,a}}{\gamma} = 1 \pm g, \quad \frac{\Lambda}{\gamma} = \frac{3}{4\varphi^3}, \quad g = \frac{3}{2}\left(\frac{sin\varphi}{\varphi} + \frac{cos\varphi}{\varphi^2} - \frac{sin\varphi}{\varphi^3}\right).$$

Зависимость g от φ показана на рисунке 1. При $\varphi \to 0$ $\gamma_a \to 0$, что обеспечивает долгое время жизни антисимметричной компоненты Дике. Симметричная же компонента достаточно быстро распадается. Поэтому в области малых φ при больших временах существенную роль играют антисимметричная и вакуумная компонента Дике.

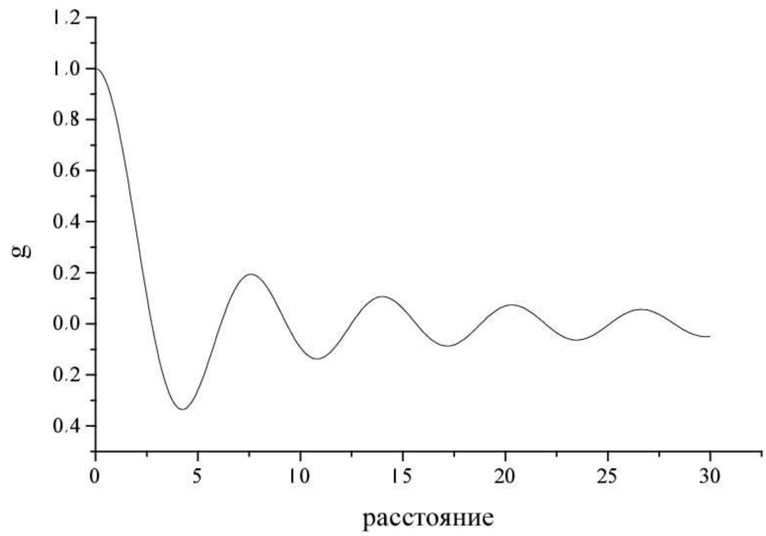

Рис. 1: Зависимость g от φ. Видно, что на малых расстояниях (порядка длины волны) g практически не меняется и примерно равно 1.

В терминах мультипликативных комбинаций индивидуальных атомных состояний $|i\rangle\,|j\rangle$ для амплитуд начальных состояний $c_{12,22}(0) = 0$, соответствующих случаю изначально невозбужденного второго атома, решение выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&|dicke\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}(t)\,|i\rangle\,|j\rangle, \\
&c_{12}(t) = c_{21}(0) f_a, \quad c_{21}(t) = c_{21}(0) f_s, \\
&c_{22}(t) = 0, \quad c_{11}(t) = c_0(t), \\
&f_s = \tfrac{1}{2}(e^{-(\gamma_s/2 + i\Lambda)t} + e^{-(\gamma_a/2 - i\Lambda)t}), \\
&f_a = \tfrac{1}{2}(e^{-(\gamma_s/2 + i\Lambda)t} - e^{-(\gamma_a/2 - i\Lambda)t}).
\end{aligned}
$$

Вид функций f_s и f_a, определяющих коэффициенты c_{12}, c_{21} показан на рисунках 2 и 3. Следует обратить внимание на осцилляционный характер зависимости $f_{s,a}$ от межатомного расстояния и времени. При уменьшении расстояния φ повышается частота осцилляций, что видно из формулы $\Lambda = \frac{3\gamma}{4\varphi^3}$. Данные осцилляции приводят к интерференции состояний Дике, что повлияет на величину и характер изменения совместимой информации.

Матрица плотности, после усреднения по флуктуациям атомного поля, представленным переменной $\xi(t)$, выглядит следующим образом:

$$
\hat{\rho}_{dicke} = \begin{pmatrix} |c_{11}|^2 & c_0(0)c_{12}^* & c_0(0)c_{21}^* & 0 \\ c_{12}c_0(0) & |c_{12}|^2 & c_{12}c_{21}^* & 0 \\ c_{21}c_0(0) & c_{21}c_{12}^* & |c_{21}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

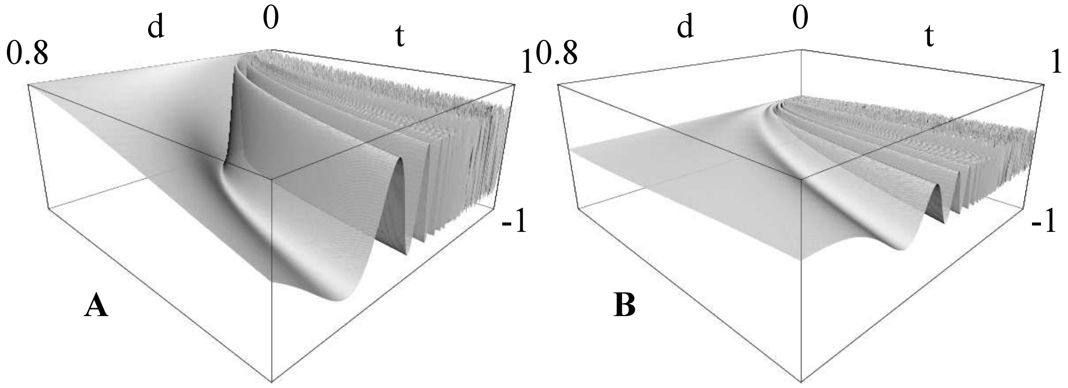

Рис. 2: Зависимость $Re(f_s)$ и $Im(f_s)$ от времени t и расстояния d.

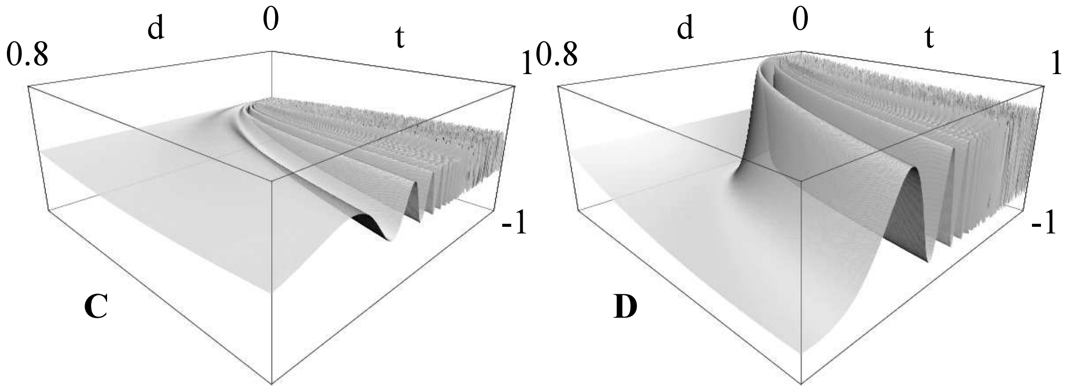

Рис. 3: Зависимость $Re(f_a)$ и $Im(f_a)$ от времени t и расстояния d.

Соответствующее ей совместное распределение равно

$$\begin{aligned}
&P(d\alpha, d\beta) = \sum \rho_{ijkl} \langle\alpha|\, i\rangle \langle\beta|\, j\rangle (\langle\alpha|\, k\rangle \langle\beta|\, l\rangle)^* dV_\alpha dV_\beta = \\
&(|c_{11}|^2 \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + c_0(0) c_{12}^* \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle)^* + \\
&c_0(0) c_{21}^* \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + |c_{12}|^2 \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle)^* + \\
&c_{12} c_0(0)^* \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + c_{12} c_{21}^* \langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle (\langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + \\
&|c_{21}|^2 \langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + c_{21} c_0(0)^* \langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 1\rangle)^* + \\
&c_{21} c_{12}^* \langle\alpha|\, 2\rangle \langle\beta|\, 1\rangle (\langle\alpha|\, 1\rangle \langle\beta|\, 2\rangle)^*) dV_\alpha dV_\beta.
\end{aligned}$$

5 Полученные результаты

5.1 Схема расчетов

Конечная формула для совместимой информации:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_1 P(d\alpha, d\beta) \log_2 \left(\frac{P(d\alpha, d\beta)}{P(d\alpha) P(d\beta)} \right),$$

где $P(d\alpha) = \int P(d\alpha, d\beta) d\beta$, $P(d\beta) = \int P(d\alpha, d\beta) d\beta$, с указанным выше распределением $P(d\alpha, d\beta)$. Вычисления совместимой информации выполнялись в системе символьной математики Mathematica 4.0. Сначала аналитически определялось выражение

$P(d\alpha, d\beta)$, в зависимости от начальных условий, затем численно (в виду крайней сложности аналитического взятия четырёхкратного интеграла) вычислялась совместимая информация. Гарантированная точность вычислений — три знака после запятой.

Начальные условия для рассматриваемой задачи сводятся к произвольному заданию начальной матрицы плотности $\hat{\rho}_A$ первого атома. Второй атом изначально находится всегда в нижнем состоянии. Выделялось три случая:

1) Первый атом полностью находится в верхнем состоянии: $\hat{\rho}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Первый атом находится в чистом состоянии — равновероятной суперпозиции верхнего и нижнего уровней: $\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) Первый атом находится в состоянии равновероятной смеси верхнего и нижнего уровней: $\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2 Зависимости совместимой информации от времени, расстояния и начального состояния первого атома

Анализировались зависимости совместимой информации от времени и расстояния при трех выделенных выше начальных условиях. Интересующая нас область изменения безразмерных параметров — от нуля до единицы; безразмерное время при этом изменяется от 0 до 1 и расстояние изменяется от δ до 1, где δ — достаточно малая, но ненулевая величина, при которой еще справедливо записанное выше решение задачи Дике. В программе было выбрано $\delta = 10^{-3}$, что примерно соответствует расстоянию $1\dot{A}$. На таких масштабах наиболее отчетливо видны характер изменения информации и ее максимальная и минимальная величины.

Полученные зависимости представлены на рисунках 4,5 и 6 в виде трёхмерных графиков, где по горизонтальным осям отложены время и расстояние, а по вертикальной — соответствующее данной пространственно–временной точке значение совместной информации. В области малых расстояний присутствуют искажения гладкости графиков, связанные с дискретной сеткой, на которой проводились расчеты. Сетка имеет размер 60 на 60 точек. Большее разрешение брать нецелесообразно ввиду квадратичного увеличения времени расчетов, а при практически любом разрешении искажения всё–равно присутствовать будут, в силу увеличения частоты осцилляций при $\varphi \to 0$.

Также анализировалась зависимость совместной информации от разности населенностей для случая смешанного и чистого начального состояния первого атома при конкретных, произвольно выбранных значениях времени и расстояния: $\gamma t = 0.2, \varphi = 0.4$. Полученная зависимость представлена на рисунке 7.

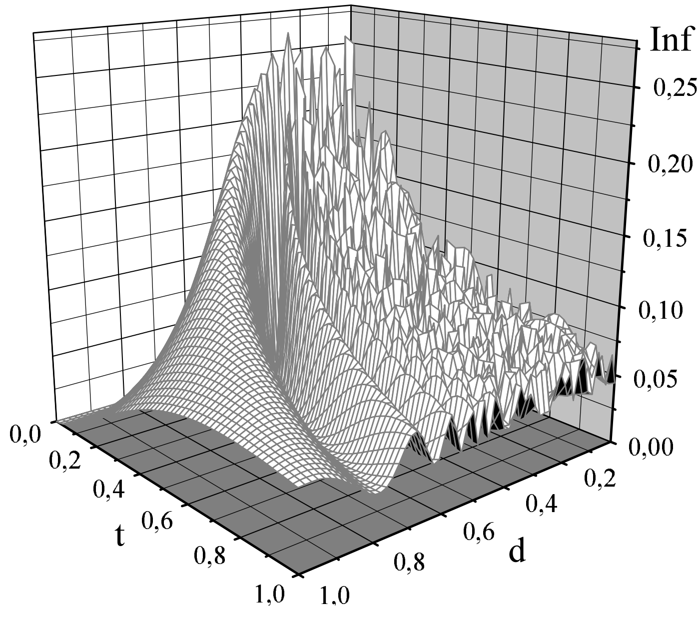

Рис. 4: Зависимость совместимой информации Inf от времени t и расстояния d для первого случая начальной матрицы плотности (первый атом в начальный момент времени находится полностью в верхнем состоянии).

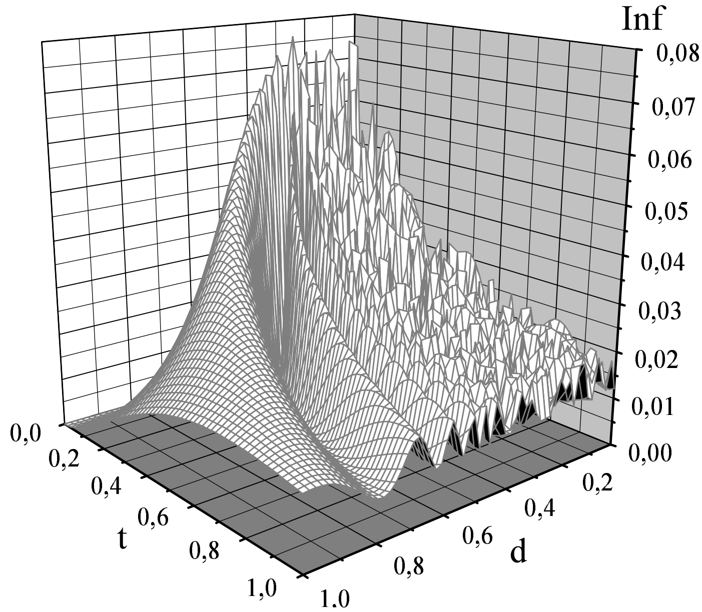

Рис. 5: Зависимость совместимой информации Inf от времени t и расстояния d для второго случая начальной матрицы плотности (первый атом в начальный момент времени находится в состоянии суперпозиции верхнего и нижнего уровней, разность населенностей равна нулю).

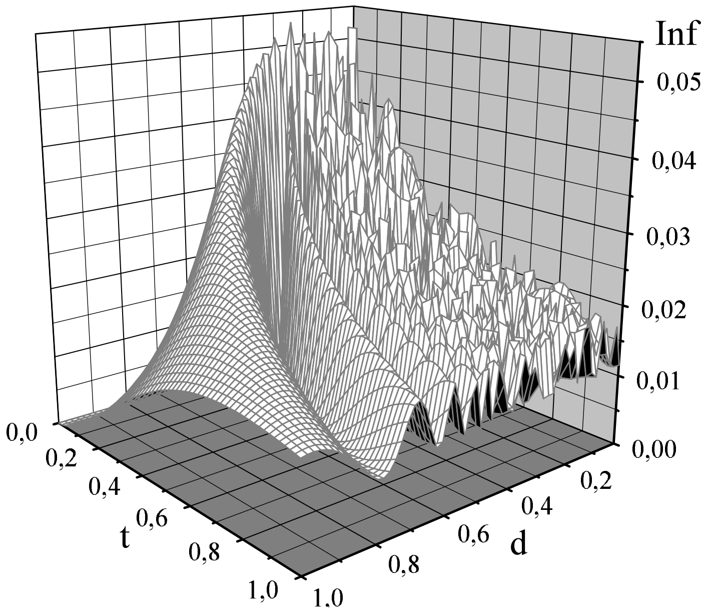

Рис. 6: Зависимость совместимой информации Inf от времени t и расстояния d для третьего случая начальной матрицы плотности (первый атом в начальный момент времени находится в состоянии смеси верхнего и нижнего уровней, разность населенностей равна нулю).

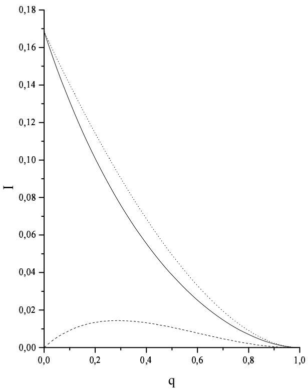

Рис. 7: Зависимость совместимой информации I от разности населенностей, определенной через параметр q. При $q = 1$ первый атом в начальный момент времени находится полностью в нижнем состоянии, при $q = 0$ — полностью в верхнем. Сплошной линией представлена зависимость для случая, когда переход от $q = 0$ к $q = 1$ осуществляется при начальном состоянии атома, заданном в виде классической смеси, пунктирной — в виде чистого начального состояния, а штриховой линией показана разность этих зависимостей.

6 Обсуждение результатов

Как и предполагалось вначале, зависимость информации от времени и расстояния носит осцилляционный характер, обусловленный короткодействующим диполь—дипольным взаимодействием. При $\varphi \to 0$ наблюдается характерное увеличение частоты осцилляций. При $\gamma t \to 0$ такой особенности нет. В начальный момент времени $I = 0$, т.к. атомы независимы. Далее, с течением времени, информация возрастает до некоторого максимального значения, зависящего от начального состояния первого атома, затем, осциллируя, стремится к нулю. Чем меньше расстояние между атомами, тем большее значение информации может быть достигнуто с течением времени на первом периоде колебаний, и тем дольше будет убывать информация. При малых расстояниях информация очень долго (при $\varphi \to 0$ бесконечно долго) остается ненулевой, что обусловлено наличием долгоживущей компоненты Дике. Её присутствие в смеси с вакуумной компонентой при полностью инвертированном начальном состоянии первого атома дает величину $\simeq 0.05317$. Для других начальных состояний она меньше. Таким образом, при бесконечно малых расстояниях информация не равна нулю, с ростом расстояния она, осциллируя, убывает до нуля на бесконечно больших расстояниях.

Такая зависимость отражает физическую картину процесса излучения одного атома в присутствии другого. На малых расстояниях между двумя атомами фотон долго не может уйти из системы двух атомов, переходя от одного к другому, создавая перепутанное состояние системы. Поэтому информация долго остается относительно большой. Понятно, что степень перепутанности будет зависеть от того, насколько успел излучиться фотон до начала рассмотрения процесса. Чем меньше заселенность верхнего уровня первого атома в начальный момент времени, тем более связанными могут стать атомы, и тем большее может получиться значение совместимой информации. Однако, со временем, фотон все—таки излучается в вакуум, как бы близко не находились атомы. Состояния атомов при этом становятся независимыми, поэтому информация на бесконечности стремится к нулю.

Характер осцилляций информации одинаков для всех случаев начальных условий. По абсолютной величине информация максимальна для первого случая, когда первый атом изначально находится в полностью инвертированном состоянии. В области бесконечно малого времени и расстояния она стремится к максимально возможной величине $\simeq 0.278$.

В случае смешанного начального состояния первого атома информация меньше, чем в случае суперпозиционного (либо равна, если эти состояния совпадают) при той же разности населенностей. Это обстоятельство отражает тот факт, что в случае чистого состояния квантовая система менее чувствительна к неселективному измерению, чем классическая смесь. Как видно из графика, представленного на рисунке 7, с ростом разности населенностей информация монотонно возрастает от нуля (населенность верхнего уровня при нулевой информации равна нулю), до некоторого максимального значения, определенного расстоянием между атомами и временем. При этом в случае смешанного начального состояния первого атома и в случае чистого состояния зависимости совместимой информации от разности населенностей разные и достигают максимальной разности равной 0,0144 в точке $q = 0,28814$.

7 Выводы

В данной работе показано, как применить понятие совместимой информации к реальной физической системе. Проведен расчет совместной информации в задаче Дике, и проанализирована её зависимость от параметров задачи. Полученные зависимости свидетельствуют о том, что понятие совместимой информации вполне физично, и отражает степень корреляции элементарных физических событий — волновых функций. Как мера скоррелированности физических систем она не уточняет конкретный вид состояния системы, но характеризует его информационные свойства.

Список литературы

[1] C. P. Williams and S. H. Clearwater, *Explorations in Quantum Computing* (Telos/Springer-Verlag, New York, 1998).

[2] J. Preskill, *Lecture notes on Physics 229: Quantum information and computation*, located at http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/.

[3] Б.А.Гришанин, В.Н.Задков, *Совместимая информация как естественная информационная мера квантового канала*, в печати.

[4] B. A. Grishanin and V. N. Zadkov, Phys. Rev. A 62, 032303 (2000).

[5] Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Простые квантовые системы как источник когерентной информации, в печати.

[6] И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Запутанные квантовые состояния атомных систем, УФН, 171, 6, 2001г.

[7] Р. Галлагер, *Теория информации и надежная связь* (Сов. Радио, Москва, 1974).

[8] R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 9 (1954)

[9] B. Schumacher and M.A. Nielsen, Phys. Rev. A **54**, 2629 (1996).

[10] Р. Л. Стратонович,*Теория информации* (Сов. Радио, Москва, 1975).

[11] S. Lloyd, Phys. Rev. A **55**, 1613 (1997).

[12] C. M. Caves and C. M. Fuchs, LANL e-print quant-ph/0004062(2000).