Квантовые измерения
Лекция для аспирантов МЛЦ МГУ

Б. А. Гришанин

31 марта 2004

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Зачем нужно возвращаться к проблеме квантового измерения?
2. Классические измерения
3. Квантовые измерения

1 Введение

Зачем нужно обсуждать квантовое измерение чуть ли не век спустя после Неймана, который правильно объяснил его физический смысл?

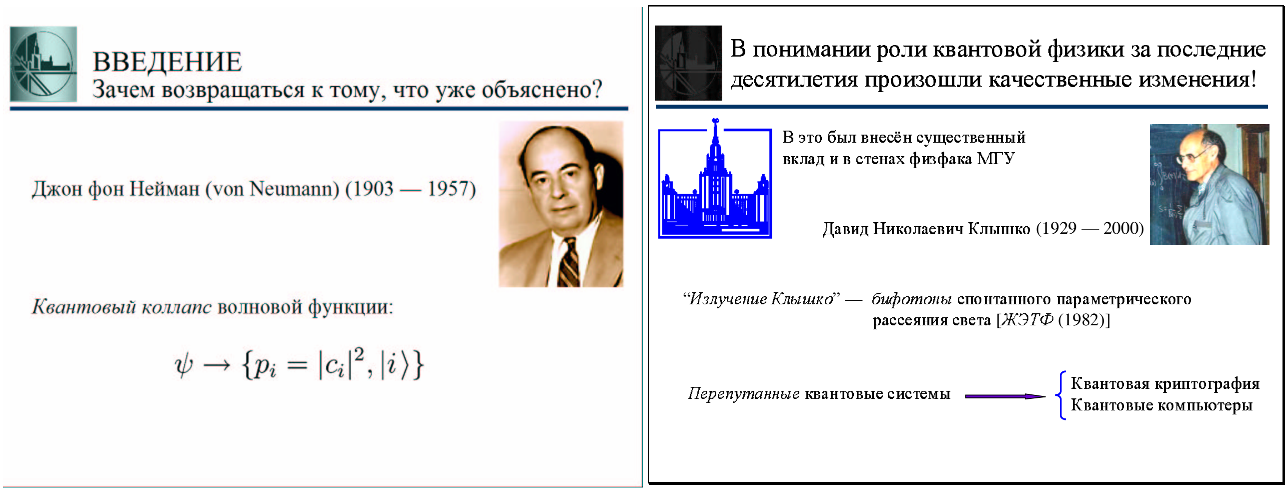
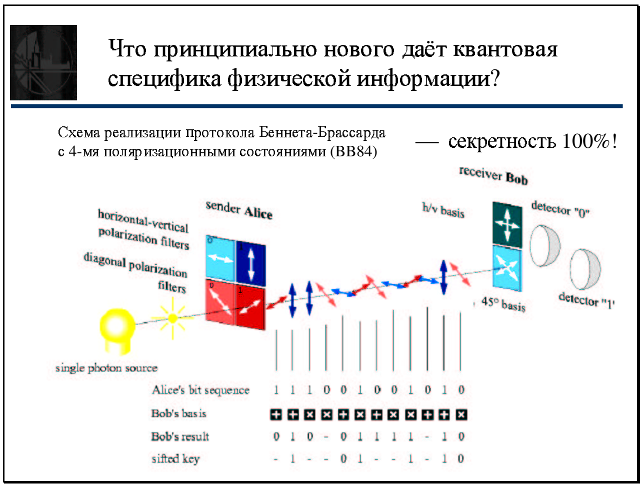


Рис. 1: Слайды № 2,3.

Мы увидим, что в теории Неймана нехватает элемента, который является определяющим для наиболее современного раздела квантовой физики — физики квантовой информации. Выявлению принципиальной роли этого элемента, наряду с общим прогрессом в области физического эксперимента, в значительной степени способствовали и фундаментальные работы по параметрическому рассеянию света, выполненные в МГУ. В бифотонах, естественно рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния света, существуют специфические неклассические корреляции между составляющими их фотонами, которые являются следствием их принадлежности к единому чистому двухфотонному состоянию, описываемому единой двухчастичной волновой функцией. Наличие таких корреляций характеризуется термином *перепутанность* (иначе — запутанность, от английского термина *entanglement*). Параметрическое рассеяние является одним из важнейших и относительно легко доступных методов генерации перепутанных квантовых систем.

Перепутанность является ключевым элементом для реализации удивительных возможностей, связанных с использованием квантовой специфики физической информации. В первую очередь это *квантовая криптография* и *квантовые вычисления*, для которых квантовый характер информации определяет возможность достижения целей, принципиально недостижимых в классических системах.

Использование пар пространственно разделённых перепутанных фотонов позволяет организовать обмен информацией со 100%-гарантированной секретностью связи. Это возможно благодаря тому, что вмешательство подслушивателя при существенно квантовом кодировании информации неизбежно связано с изменением состояния фотонов, которое может быть с гарантией обнаружено. Наиболее простой вариант схемы квантовой передачи секретного ключа показан на данной схеме, реализующей так называемый протокол BB84, предложенный в 1984 г. Беннетом и Брассардом. Он основан на кодировании квантовой информации в четырёх попарно-неортогональных поляризационных состояниях отдельных фотонов, выбираемых одним участником обмена (Алисой) и измеряемых другим (Бобом).



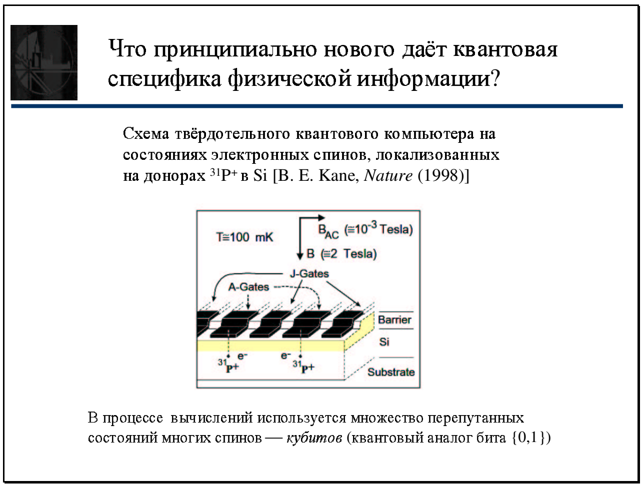


Рис. 2: Слайды № 4,5.

Использование совместных операций, создающих перепутанность между отдельными квантовыми системами, позволяет добиться скорости вычислений, принципиально недостижимо для компьютеров, работающих с классической информацией. В качестве иллюстрации физического воплощения квантового компьютера показана схема, основанная на использовании состояний спина электронов, локализованных на донорах примеси фосфора $^{31}P^{+}$ в кремнии.

И помимо эффекта перепутанности, не имеющего адекватного отражения в теории измерений фон Неймана, достаточно и других веских причин как для её математического усовершенствования, так и физической детализации. Это связано с актуальной в настоящее время проблемой реализации так называемых *невозмущающих* квантовых измерений, которые не вносят в результат измерения дополнительных возмущений, кроме тех, которые связаны с самой неустранимой внутренней квантовой неопределённостью физических величин. В качестве одного из ярких примеров такого типа измерений можно привести измерения с максимально возможной точностью малых смещений массивного тела с целью регистрации гравитационных волн в рамках соответствующего проекта *LIGO*, некоторые из ключевых исполнителей которого представлены на слайде. Другим примером невозмущающего квантового измерения является выполненная относительно недавно регистрация (т.е. квантовое измерение с результатом 0 или 1) фотона без его поглощения. Подобные эксперименты показывают, что теория квантовых измерений, которая поначалу могла рассматриваться лишь как чисто теоретический раздел квантовой физики, необходимый для её полноты, приобретает самостоятельное значение для описания эксперимента.

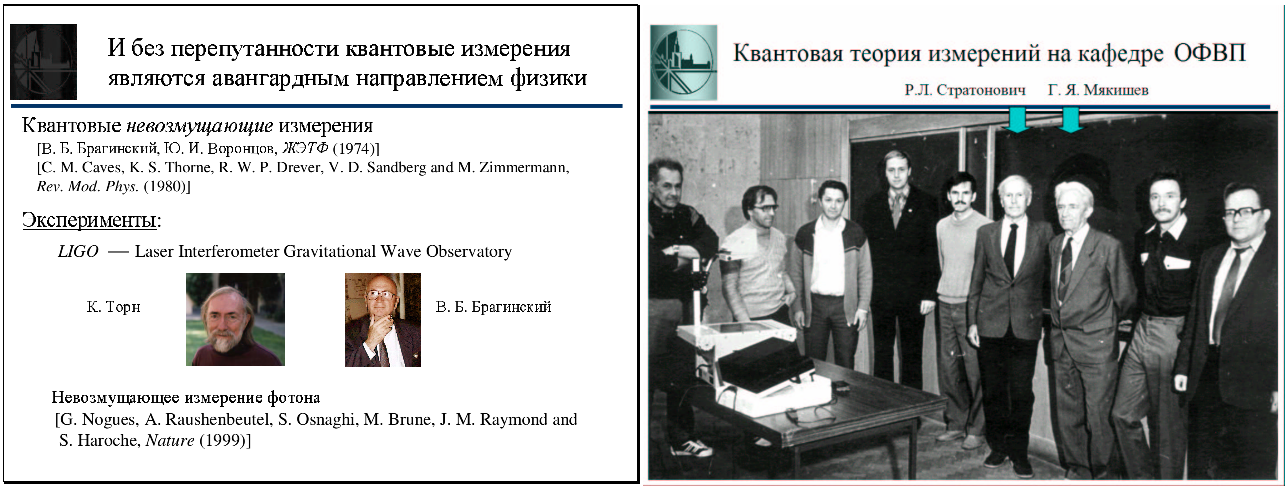


Рис. 3: Слайд № 6,7.

Общепризнано, что максимально полное понимание теории квантовых измерений необходимо для более глубокого осознания самих основ квантовой теории. Неудивительно, что этой теории отдали должное и многие учёные, работавшие в нашем корпусе. Это и Д. Н. Клышко, с которым у автора данного доклада были содержательные дискуссии по поводу описания многовременных измерений, и присутствующие на фотографии данного слайда покойные ныне профессора Г. Я. Мякишев, интересовавшийся философскими аспектами теории, и Р. Л. Стратонович, основательно поработавший над одной конкретной динамической моделью измерительного процесса.

2 Классические измерения

В теории, описывающей процесс измерения, должны фигурировать две физические системы — объект и измеритель (прибор). Для того, чтобы лучше понять квантовые измерения, правильнее всего начать с качественного смысла и математического представления классического измерения в такой двухсоставной системе. Для его описания с нужной степенью общности необходимо соответствующее абстрактное описание классической физической системы.

При описании измерения возможны два основных качественно отличающихся уровня конкретизации:

1. Полное динамическое описание всех степеней свободы — *микротеория*.

2. Описание результирующего преобразования начального состояния с учётом лишь наиболее существенных степеней свободы — *макротеория*.

Прежде чем переходить к абстрактному математическому описанию идеального измерения, следует выяснить:

- Что именно измеряется — качественное содержание понятия *физическая величина* (наблюдаемая);

- Каковы качественно различные подходы к пониманию измерения — важность рассмотрения понятия *идеального* измерения.

2.1 Абстрактное описание классической физической системы в проблеме измерения

Сокращённое описание системы объект–прибор связано с возможностью радикального сокращения описания физических переменных в тех случаях, когда можно не включать в рассмотрение всё их многообразие. Исход-

Рис. 4: Слайды № 8,9.

ное динамическое описание физической переменной f задаётся функцией $f = F(X)$, где $X = (q, p)$ описывает полный набор *канонических* динамических переменных — импульсов и координат рассматриваемой системы, значения которых описывают все *элементарные состояния* системы. Каждая функция содержит в себе два разделяющихся математических объекта — набор её возможных значений f_k и набор соответствующих этим значениям подмножеств элементарных состояний a_k, которые описывают физические *события* $f = f_k$. Если набор существенных переменных ограничен, то этих математических объектов радикально меньше, чем множество *всех* элементарных состояний X, и это указывает на возможность сокращённого описания системы.

Более того, можно рассматривать события a_k безотносительно к значениям соответствующих физических величин, что приводит к введению так называемого *вероятностного пространства*. Последнее описывается *сокращённым* множеством элементарных событий $\Omega \ni \omega$, заданным на нём множеством рассматриваемых физических событий $\mathcal{A} \ni a$ — которое образует так называемую Σ-алгебру — и заданным на этой Σ-алгебре распределении вероятностей ρ со значениями $\rho(a)$. Последнее описывает статистическое состояние системы описывается. Вероятности событий $f = f_k$ при этом описываются выражениями $\rho_k = \int P_k(\omega)\rho(d\omega)$, где $P_k(\omega)$ описывает индикаторную функцию множества a_k, т.е.

$$P_k(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in a_k, \\ 0 & , \quad \omega \notin a_k. \end{cases}$$

При этом сама физическая величина представляется в форме

$$f = \sum_k f_k P_k(\omega),$$

в которой она разделена на её возможные — *собственные* — значения и индикаторы событий, состоящих в принятии ею этих значений.

2.2 Что следует понимать под измерением?

Возможны два противоположных подхода: под измерением можно понимать а) извлечение любой информации об измеряемой величине; б) только точное измерение. Оба этих подхода имеют смысл в своей сфере применимости. Второй подход выделяет среди произвольных методов извлечения информации её получение в идеальном виде и, очевидно, он вводит один из наиболее фундаментальных каналов получения информации. При этом наибольший интерес представляет такое измерение, которое, если только это принципиально возможно,

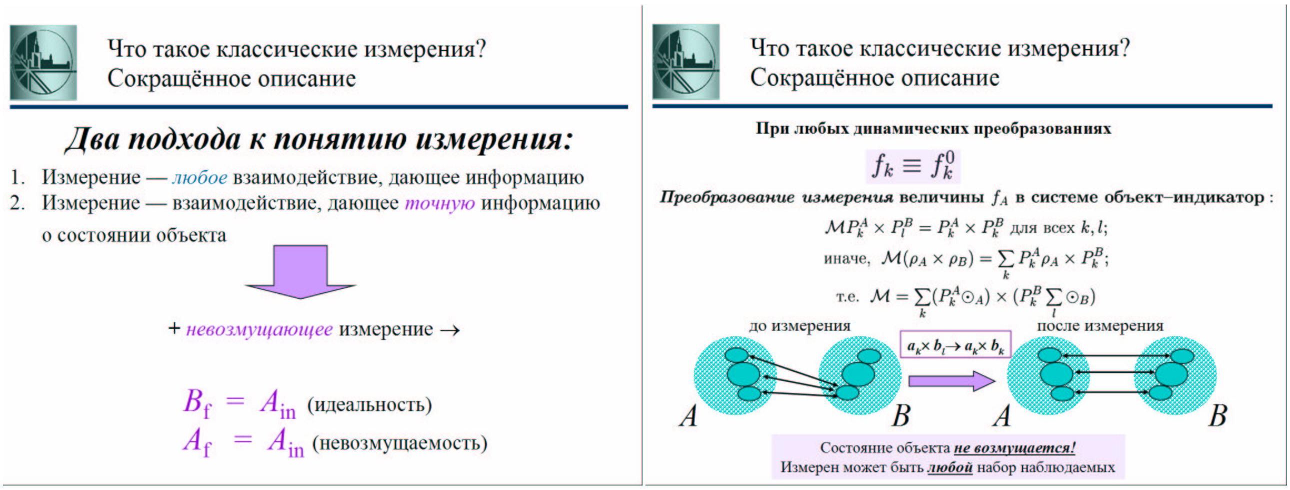


Рис. 5: Слайды № 10,11.

не изменяет начальное состояние измеряемого объекта. Оно известно как *невозмущающее* — *non-demolition measurement*.

2.3 Абстрактное определение классического измерения

Результирующее преобразование в макротеории может быть получено путём соответствующего сокращения полного динамического описания. Однако, желательно рассматривать его независимо, для чего необходимо иметь математическую гарантию *физической реализуемости*, т.е. существования такой микросистемы, эволюция которой приводит к рассматриваемому результату. Результат же состоит в установлении совпадения измеряемых физических переменных объекта и показаний *индикатора* результатов измерения (т.е. “стрелки прибора”: англ. — *pointer* или *meter*).

Фундаментальный для *невозмущающего* измерения факт состоит в отсутствии возмущения измеряемой переменной:

- Для любых динамических преобразований $f_k = f_k^0$.

$$\textbf{\textit{Преобразование измерения} величины } f_A \textbf{ в системе объект–индикатор :}$$
$$\mathcal{M} P_k^A \times P_l^B = P_k^A \times P_k^B \text{ для всех } k, l;$$
$$\text{иначе, } \mathcal{M}(\rho_A \times \rho_B) = \sum_k P_k^A \rho_A \times P_k^B;$$
$$\text{т.е. } \mathcal{M} = \sum_k \left(P_k^A \odot_A\right) \times \left(P_k^B \sum_l \odot_B\right)$$

Его содержание состоит в том, что на совместном множестве состояний системы объект–прибор $\Omega = \Omega_A \times \Omega_B$ выполняется отображение

$$a_k \times b_l \to a_k \times b_k \text{ для всех } k, l,$$

соответствующих собственным значениям физических переменных $f_A = \sum f_k^A a_k$, $f_B = \sum f_k^B b_k$. В результате этого отображения выполняется соотношение $f_A = f_B$ с вероятностью 1. Такое измерение является *невозмущающим*, так как начальные состояния объекта при этом не трансформируются, $a_k \to a_k$, изменяется лишь состояние прибора.

В классической теории структура набора из нескольких переменных качественно не отличается от случая одной переменной, поэтому и *произвольный набор* наблюдаемых также может быть точно измерен.

3 Квантовая теория измерений

В квантовом случае, с одной стороны, по сравнению с классической теорией, имеется лишь одно отличие — в структуре пространства физических состояний. Однако это отличие столь радикальное, что проявления его чрезвычайно многообразны. Тем не менее, можно выделить наиболее общие качественные особенности квантовой информации по сравнению с классической при описании процессов информационного обмена.

3.1 Квантовые состояния и наблюдаемые

Множество элементарных состояний задаётся в квантовой теории гильбертовым пространством волновых функций, из которых взаимно различимы лишь наборы ортогональный функций. Это происходит из-за того, что эти состояния различаются друг от друга с помощью квадрата модуля скалярного произведения $|\langle\beta|\ \alpha\rangle|^2$, которое, в отличие от точно различимых классических элементарных состояний, описываемых точками множеств и характеризуемых индикаторной функцией со значениями 0 и 1, принимает произвольные значения между нулём и единицей. Такая метрика следует из представления алгебры физических переменных операторами, произведения которых которых и содержат произведения соответствующих им наборов элементарных состояний.

Вероятностное пространство в квантовой теории представлено гильбертовым пространством элементарных состояний, алгеброй его подпространств и матрицей плотности: $(H, \mathcal{A}, \hat{\rho})$. Наблюдаемые описываются операторами $\hat{f} = \sum_k f_k \hat{P}_k$. Ортогональные проекторы выделяют из всего пространства состояний собственные подпространства $a_k = \hat{P}_k H$, в которых $\hat{f} \to f_k$. Вероятности этих событий есть $\rho_k = \mathrm{Tr}\, \hat{P}_k \hat{\rho}$. Неклассичность отображается следующими эквивалентными фактами: *неортогональностью* собственных векторов различных наблюдаемых и *некоммутативностью* соответствующих им операторов

$$\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = 0.$$

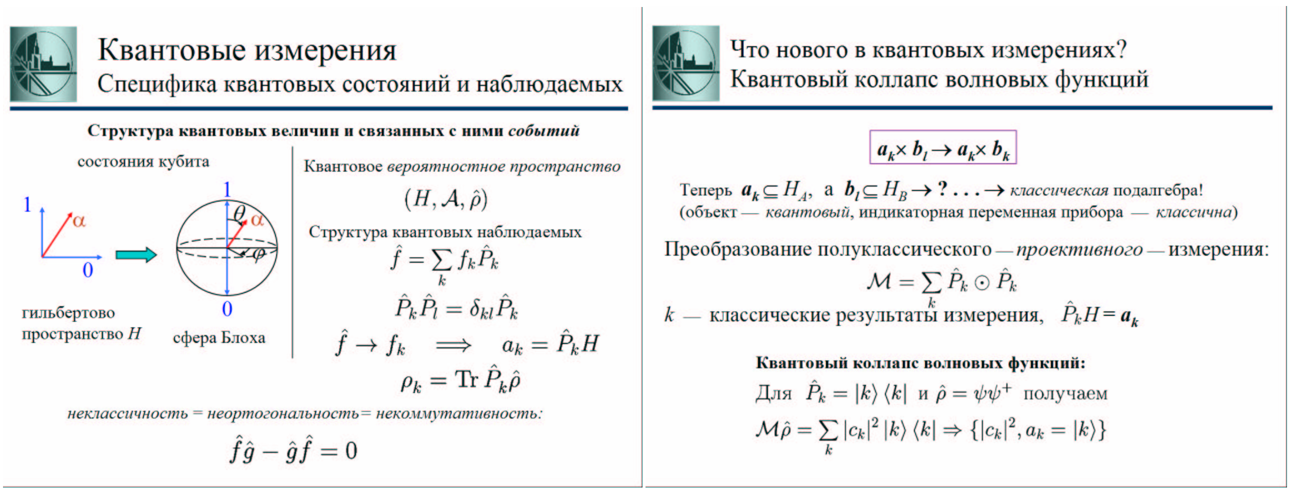


Рис. 6: Слайды № 12,13.

3.2 Квантовые коллапс волновых функций

В теории квантового измерении по Нейману предполагается, что измеритель, по крайней мере его индикаторная переменная, проявляет себя при измерении как классический объект, для которой квантовый характер её состояний несущественен. Поэтому в конечном результате при описании измерения как квантовая система выступает только измеряемый объект. Оператор преобразования её матрицы плотности в результате измерения имеет вид

$$\mathcal{M} = \sum_k \hat{P}_k \odot \hat{P}_k. \tag{1}$$

Здесь $\hat{P}_k$ выделяет области состояний, в которых измеряемая переменная $\hat{f}$ принимает значения f_k, а индексы k описывают как значения измеряемой переменной, так и результатов измерения.

После применения подобного преобразования с $\hat{P}_k = |k\rangle\langle k|$, соответствующим максимально детализированному измерению с одномерными собственными пространствами $a_k = |k\rangle$, к чистому состоянию $\hat{\rho} = \psi\psi^+$ получаем

$$\mathcal{M}\hat{\rho} = \sum_k |c_k|^2 \, |k\rangle\langle k|, \tag{2}$$

что соответствует полному коллапсу чистого начального состояния к вероятностной смеси собственных состояний $|k\rangle$ с точными значениями измеренной переменной $\hat{f} = f_k$.

При этом формальном описании остаётся нераскрытым вопрос, чему физически соответствует данная статистическая смесь чистых состояний? Ведь реально система одна, и требуется понять, как в рамках одного измерения, описываемого супероператором (1), возникает вероятностный набор различных событий. Отложим решение этого вопроса до завершения рассмотрения измерений с квантовым индикатором.

3.3 Прибор может быть и квантовым

После освоения квантовой физикой самых разнообразных квантовых проявлений физического мира стало понятным, что первоначальное отождествление квантовых эффектов с микроскопичностью объектов в общем случае неправомерно: квантовые системы могут быть как микроскопическими, так и макроскопическими. Так что априори рассматривать любую физическую системы как квантовую, в которой пренебрежение квантовыми эффектами может реализовываться через соответствующие малые параметры системы. Поэтому измерительный прибор следует в общем случае рассматривать как квантовый объект.

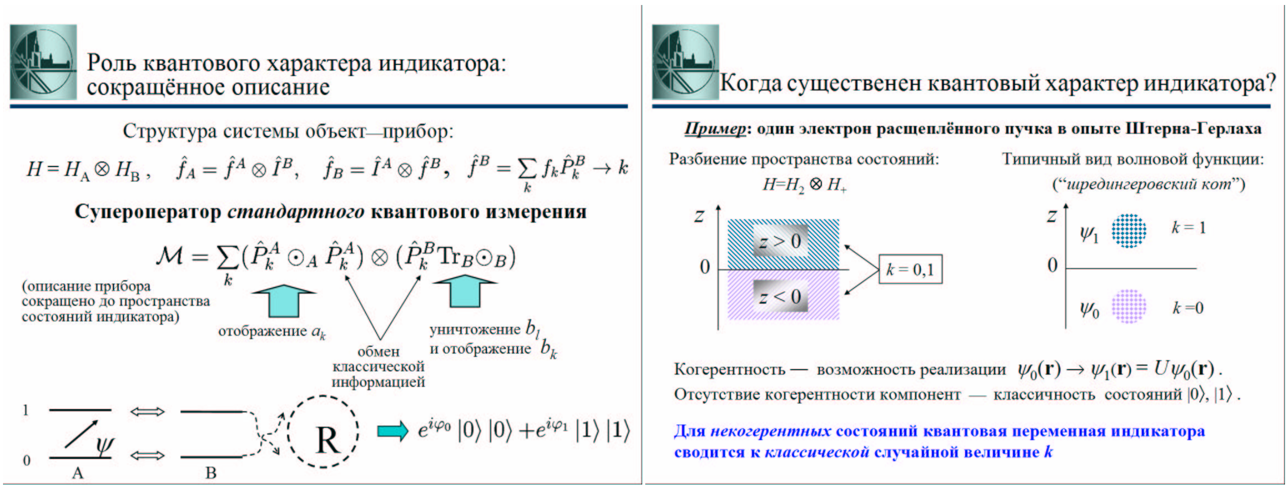


Рис. 7: Слайды № 14,15.

Тем не менее, полуклассическую концепцию неймановской теории можно сохранить и в этом случае, предполагая классический характер добытой информации. Её же классичность при квантовом описании предполагает просто несущественность наличия переменных, не коммутирующих с индикаторной переменной $\hat{I}^A \otimes \hat{f}^B$. Измерение же как преобразование в составной системе $A+B$ состоит в преобразовании состояния объекта, описанном выше — квантовом коллапсе — и установлении нового состояния прибора, показания индикатора которого совпадают с измеренными — классическими — значениями:

$$\hat{f}^B = \sum_k f_k \hat{P}_k^B \to k.$$

Такое совместное преобразование при сокращённом описании индикатора минимальным пространством переменных, необходимых для его задания, представляется супероператором

$$\mathcal{M} = \sum_k (\hat{P}_k^A \odot_A \hat{P}_k^A) \otimes (\hat{P}_k^B \mathrm{Tr}_B \odot_B), \tag{3}$$

где проекторы $\hat{P}_k^B = |k\rangle_B \langle k|_B$ одномерны[1] и по всем внутренним переменным выполнено усреднение, включённое в операцию $\mathrm{Tr}_B \odot_B$.

Примером реализации такой процедуры могут быть два любых кубита, один из которых связан с резервуаром, обеспечивающим необратимый переход в конечное состояние — некогерентную суперпозицию вида

$$|c_0| e^{i\varphi_0} \, |0\rangle \, |0\rangle + |c_1| e^{i\varphi_1} \, |1\rangle \, |1\rangle$$

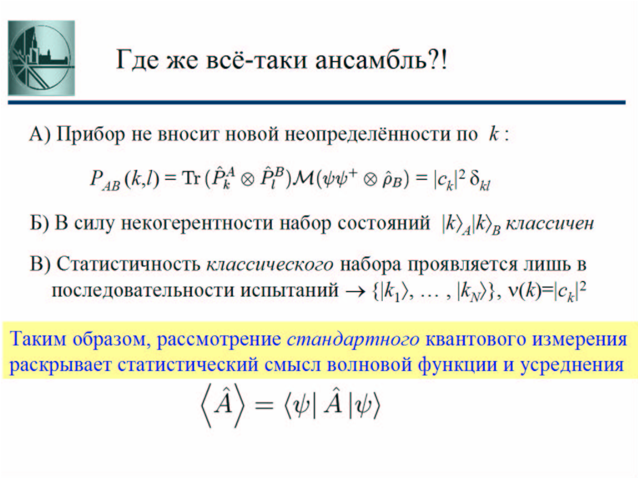
двух двухкубитовых состояний совпадающими значениями измеряемой переменной объекта и индикатора. Нетрудно видеть, что такое некогерентное — зависящее от случайных фаз — состояния системы соответствует смешанному ансамблю состояний чистых состояний $|k\rangle \, |k\rangle$ объект-прибор с вероятностями, равными квадратам модуля амплитуд волновой функции. Квантовый характер индикаторной переменной в общем случае может быть существенен. Но реально это зависит от деталей структуры и возможностей выполнения измерения его значений, аналогично измерению объекта. Если это предполагается заведомо невозможным, то в данном выражении состояние индикатора прибора $|k\rangle$ фактически описывает классическую случайную величину с двумя значениями и можно было бы с самого начала при измерении динамику прибора считать чисто классической.

При таком асимптотическом описании динамики прибора нужно только смириться с тем, что гамильтониан его взаимодействия с квантовым объектом, тем не менее, является существенно квантовым по переменным объекта. Это с учётом связи изменения во времени с некоммутативностью приводит к зависимости от времени как состояния прибора, так и состояния объекта. Учтя это и, описав состояние прибора множеством классических состояний k, ξ, где k описывает состояние индикатора, а ξ — внутренние переменные, можно уверенно утверждать, что после усреднения по части внутренних переменных динамика переменных, оставшихся в системе объект–прибор, может быть описана *любым* преобразованием, зависящим от существенно классического — ортогонального — набора квантовых состояний $\hat{P}_k = |k\rangle \langle k|$. Оно является фактически классическим случайным процессом, существенно изменяющим состояние прибора по индикаторным переменным, но не изменяющим состояния объекта по измеряемым переменным, несмотря на неизбежное их изменение по остальным переменным. В каком конечном состоянии окажется объект — зависит только от значений измеряемой переменной объекта, которые в силу квантовой неопределённости *одновременно* содержатся всего в одном его начальном состоянии ψ.

При описании данного преобразования в терминах классического распределения вероятностей оно удовлетворяет единственным ограничениям — сохранению положительности и нормировки распределения вероятностей. Остаётся объяснить лишь, где же в такой структуре находится ансамбль событий: ведь система одна и случайные фазы всегда имеют какое-то определённое значение. При этом вследствие некогерентности волновых функций описывающих рассматриваемые события, состояние объект–прибор является классическим, в котором квантовые состояния $|k\rangle_A |k\rangle_B$ имеют смысл точно определённых состояний двух совпадающих классических величин $k_A = k_B = k$. Статистическая же неопределённость в системе объект–прибор после измерения

[1] Общий вид преобразования измерения при представлении пространства *всех* переменных прибора в форме тензорного произведения $H_B = H_f^B \otimes H_R^B$ пространств состояний индикаторной переменной и резервуара описывается супероператором $\mathcal{M} = \sum_k (\hat{P}_k^A \odot_A \hat{P}_k^A) \otimes (\hat{P}_k^f \mathcal{S}_k^R)$, где $\mathcal{S}_k^R$ описывают супероператорные отображения операторов $\hat{\rho}_B$ в полном пространстве прибора H_B в пространство H_R переменных только резервуара, которые сохраняют нормировку преобразуемой матрицы плотности. Они могут быть представлены в виде $\mathcal{S}_k^R = \mathrm{Tr}_f \mathcal{S}_k$ с произвольными супероператорами $\mathcal{S}_k$ в полном пространстве прибора.

по измеряемой переменной определяется только начальной квантовой неопределённостью объекта — квадратами модуля $|c_k|^2$. Всё становится самосогласованным, лишь если отождествить эти величины с классическими вероятностями, которые, очевидно, проявляются только в ансамбле измерений. Таким образом, мы видим что адекватное объяснение смысла волновой функции и формулы квантового усреднения достигается рассмотрением процедуры квантового измерения — фундаментальной операцией квантовой теории, связывающей квантовый объект с классическим миром.



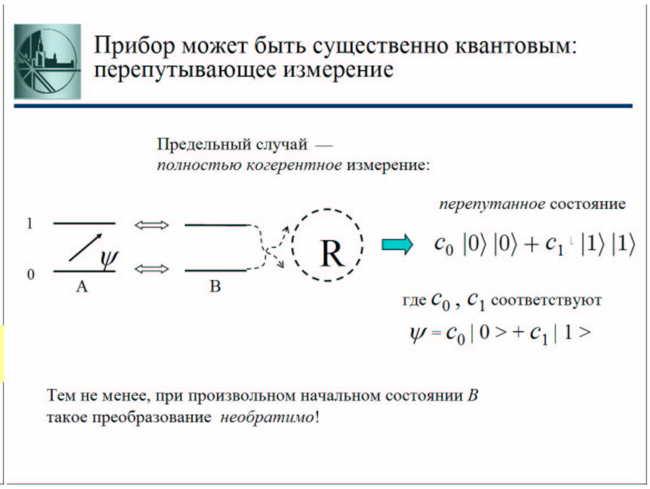


Рис. 8: Слайды № 16,17.

3.4 Перепутывающие квантовые измерения

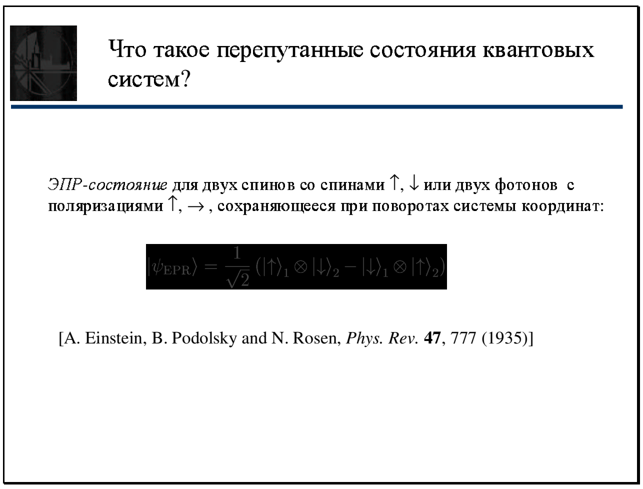


Рис. 9: Слайды № 18,19.

С учётом новейших приложений при рассмотрении измерения уже нет оснований полагать, что внутренние степени свободы обязательно разрушают когерентность состояний индикатора. В частности, возможно установление полностью когерентного состояния в системе объект—индикатор. Следует, однако, отметить, что соответствующее преобразование в общем случае является, тем не менее, необратимым, как и стандартное измерение, из-за необратимого забывания начального состояния индикатора. Оно может быть реализовано как унитарное, т.е. обратимое, лишь если начальное состояние индикатора фиксировано. Когерентность системы объект—прибор с учётом наличия у прибора информации о состоянии объекта, означает непредставимость совместной волновой функции в виде произведения парциальных, $\psi_{AB} \neq \psi_A \otimes \psi_B$, что называется квантовой *перепутанностью*. Таким образом, помимо чисто классической формы результат квантового измерения может быть представлен в форме квантовой перепутанности.

Перепутанность является специфическим свойством квантовых систем. При её наличии статистические свойства взаимных корреляции носят особые свойства, невозможные для классических систем. Это было выяснено ещё на заре становления квантовой теории. Энтропия такой составной системы, если её состояние является чистым, равна нулю, так как чистое состояние является в квантовой теории элементарным. Из-за того же, что такое элементарное состояние одновременно является суперпозицией независимых двухчастичных состояний $|i\rangle\,|i\rangle$, в которых одночастичные состояния $|i\rangle$ объекта и прибора взаимно измеряют друг друга, их одночастичные состояния имеют в результате соответствующего квантового коллапса смешанный характер с вероятностями состояний $|i\rangle$, равными $|c_i|^2$, и их энтропия отлична от нулю. Таким образом, перепутанные состояния реализуют обмен информации, который невозможен в классических система, в которых энтропия двух систем всегда больше или равна энтропии одной. В данном случае величина этой энтропии характеризует степень перепутанности.

Общий вид преобразования, создающего перепутанность с промежуточной степенью когерентности, представляется через диагональные операторы проектирования объекта и все операторы проектирования индикатора, а уничтожение начального состояния индикатора отображается операцией взятия следа. Матрица R_{kl} есть матрица перепутанности, которая имеет единичные диагональные элементы и положительно определена. Её предельные случаи даются единичной матрицей, соответствующей стандартному — некогерентному — измерению, и матрицей, составленной из одних единиц, отвечающей полностью когерентному результату

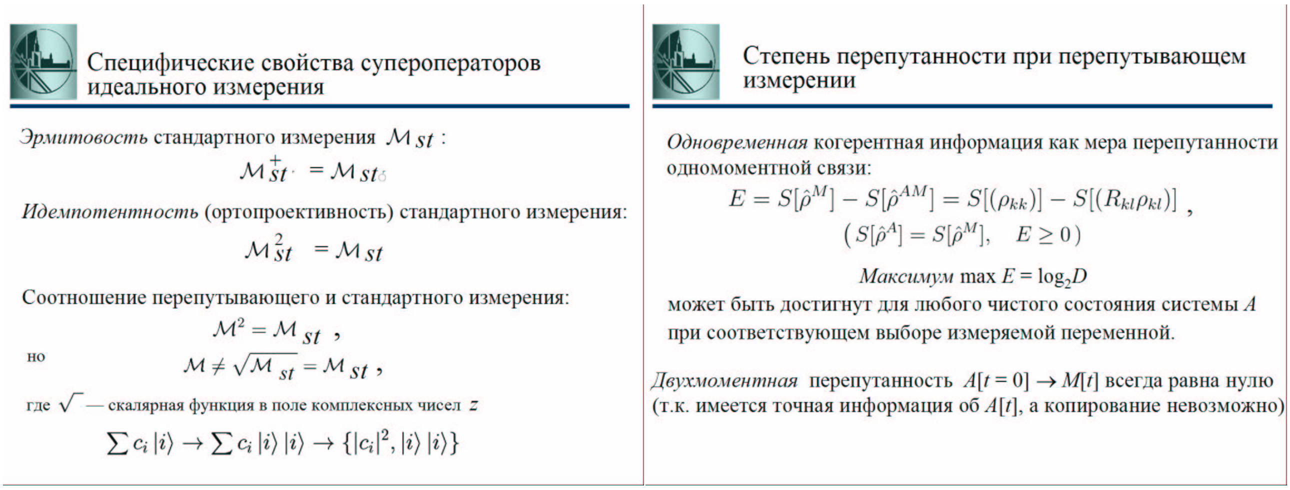


Рис. 10: Слайды № 20,21.

Супероператоры стандартного и перепутывающего измерения, будучи линейными операторами в линейном пространстве квантовых операторов, после введения в этом пространстве скалярного произведения и соответствующей метрики Гильберта-Шмидта, обладают по сравнению с другими супероператорами специфическими математическими свойствами. В то время как супероператор стандартного измерения является оператором ортогонального проектирования, супероператор перепутывающего измерения неэрмитов, а его квадрат даёт супероператор стандартного измерения. Тем самым, выполнение перепутывающего измерения второй раз приводит к потере когерентности. Это связано с тем, что при измерении когерентность начального одночастичного состояния объекта, заложенная в суперпозиции $\psi = \sum c_i\,|i\rangle$, переносится на парные состояния $|i\rangle\,|i\rangle$, но это одновременно означает потерю одночастичной когерентности. При измерений во второй раз отсутствие начальной одночастичной когерентности и приводит к её отсутствию и для двухчастичных состояний.

Для измерения степени перепутанности в промежуточном случае, когда совместное состояние не является чистым, может быть использована такая характеристика, как когерентная информация. Для состояния, результирующего после перепутанного измерения, она определена всегда положительно, хотя в общем случае это не так. Тем не менее, пока и для таких состояний не удалось доказать, что когерентная информация обладает важнейшим свойством шенноновской информации — возможностью передачи в полностью когерентной форме в том же самом количестве. Отметим, что до сих пор неизвестно ни решение этой проблемы, ни доказательство её неосуществимости.

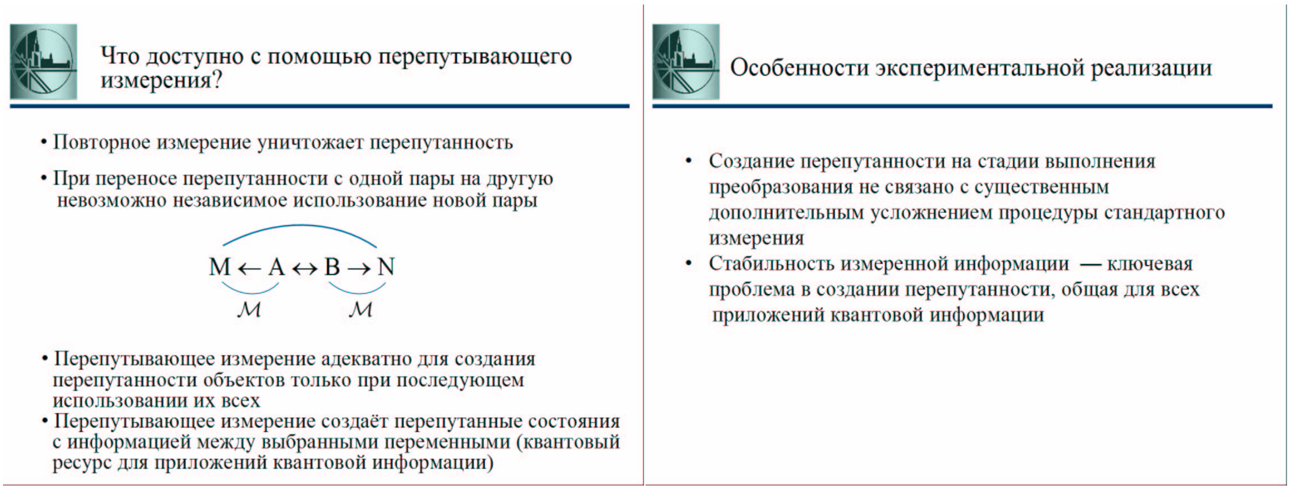


Рис. 11: Слайды № 22,23.

Практический смысл перепутывающего измерения в преобразования квантовой информации может заключаться в размножении перепутанности с сохранением информации об одной и той же переменной во всех системах. Что же касается проблемы его практической реализации, то, если не вникать в дели конкретных экспериментальных схем, они являются общими для всех методов контролируемого преобразования квантовой информации. В практическом плане, несомненно, место преобразований перепутывающего измерения ещё предстоит определить, но в теоретическом плане оно является необходимым дополнением к стандартному измерению, указывая наиболее общий способ представления точной определённой информации в квантовом мире.

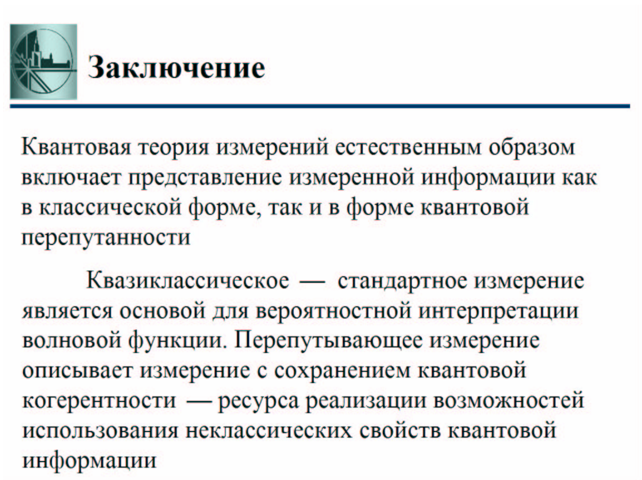


Рис. 12: Слайд № 24.